MATEMÁTICA

1.1 NÚMEROS INTEIROS: ALGORITMOS DE QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS NO SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO, DIVISIBILIDADE E DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS.

Conjunto dos Números Inteiros – Z

Definimos o conjunto dos números inteiros como a reunião do conjunto dos números naturais (N = {0, 1, 2, 3, 4,..., n,...}, o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero. Este conjunto é denotado pela letra *Z* (Zahlen=número em alemão). Este conjunto pode ser escrito por: Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- O conjunto dos números inteiros **não nulos**:
Z* = {..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,...};
Z* = Z – {0}

- O conjunto dos números inteiros **não negativos**:
Z_+ = {0, 1, 2, 3, 4,...}
Z_+ é o próprio conjunto dos números naturais: Z_+ = N

- O conjunto dos números inteiros **positivos**:
Z^*_+ = {1, 2, 3, 4,...}

- O conjunto dos números inteiros **não positivos**:
Z_- = {..., -5, -4, -3, -2, -1, 0}

- O conjunto dos números inteiros **negativos**:
Z^*_- = {..., -5, -4, -3, -2, -1}

Módulo: chama-se módulo de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.

O módulo de 0 é 0 e indica-se |0| = 0

O módulo de +7 é 7 e indica-se |+7| = 7

O módulo de –9 é 9 e indica-se |–9| = 9

O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Números Opostos: Dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.

Exemplo: O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0

No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de *a* é – *a*, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.

Adição de Números Inteiros

Para melhor entendimento desta operação, associaremos aos números inteiros positivos a idéia de ganhar e aos números inteiros negativos a idéia de perder.

Ganhar 5 + ganhar 3 = ganhar 8 (+5) + (+3) = (+8)
Perder 3 + perder 4 = perder 7 (-3) + (-4) = (-7)
Ganhar 8 + perder 5 = ganhar 3 (+8) + (-5) = (+3)
Perder 8 + ganhar 5 = perder 3 (-8) + (+5) = (-3)

O sinal (+) antes do número positivo pode ser dispensado, mas o sinal (–) antes do número negativo nunca pode ser dispensado.

Propriedades da adição de números inteiros: O conjunto *Z* é fechado para a adição, isto é, a soma de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos *a*,*b*,*c* em *Z*:
a + (b + c) = (a + b) + c
2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7

Comutativa: Para todos *a*,*b* em *Z*:
a + b = b + a
3 + 7 = 7 + 3

Elemento Neutro: Existe 0 em *Z*, que adicionado a cada *z* em *Z*, proporciona o próprio *z*, isto é:
z + 0 = z
7 + 0 = 7

Elemento Oposto: Para todo *z* em *Z*, existe (-z) em *Z*, tal que
z + (–z) = 0
9 + (–9) = 0

Subtração de Números Inteiros

A subtração é empregada quando:
- Precisamos tirar uma quantidade de outra quantidade;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto uma delas tem a mais que a outra;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto falta a uma delas para atingir a outra.

A subtração é a operação inversa da adição.

Observe que: 9 – 5 = 4   4 + 5 = 9

4 → diferença
5 → subtraendo
9 → minuendo

Considere as seguintes situações:

1- Na segunda-feira, a temperatura de Monte Sião passou de +3 graus para +6 graus. Qual foi a variação da temperatura?

Esse fato pode ser representado pela subtração: (+6) – (+3) = +3

2- Na terça-feira, a temperatura de Monte Sião, durante o dia, era de +6 graus. À Noite, a temperatura baixou de 3 graus. Qual a temperatura registrada na noite de terça-feira?

Esse fato pode ser representado pela adição: (+6) + (–3) = +3

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que (+6) – (+3) é o mesmo que (+6) + (–3).

Temos:
(+6) – (+3) = (+6) + (–3) = +3
(+3) – (+6) = (+3) + (–6) = –3
(–6) – (–3) = (–6) + (+3) = –3

Daí podemos afirmar: Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Multiplicação de Números Inteiros

A multiplicação funciona como uma forma simplificada de uma adição quando os números são repetidos. Poderíamos analisar tal situação como o fato de estarmos ganhando repetidamente alguma quantidade, como por exemplo, ganhar 1 objeto por 30 vezes consecutivas, significa ganhar 30 objetos e esta repetição pode ser indicada por um **x**, isto é: 1 + 1 + 1 ... + 1 + 1 = 30 x 1 = 30

Se trocarmos o número 1 pelo número 2, obteremos: 2 + 2 + 2 + ... + 2 + 2 = 30 x 2 = 60

Se trocarmos o número 2 pelo número -2, obteremos: (–2) + (–2) + ... + (–2) = 30 x (-2) = –60

Observamos que a multiplicação é um caso particular da adição onde os valores são repetidos.

Na multiplicação o produto dos números *a* e *b*, pode ser indicado por ***a* x *b***, ***a* . *b*** ou ainda ***ab*** sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números inteiros, devemos obedecer à seguinte regra de sinais:
(+1) x (+1) = (+1)
(+1) x (-1) = (-1)
(-1) x (+1) = (-1)
(-1) x (-1) = (+1)

Com o uso das regras acima, podemos concluir que:

Sinais dos números	Resultado do produto
Iguais	Positivo
Diferentes	Negativo

Propriedades da multiplicação de números inteiros: O conjunto *Z* é fechado para a multiplicação, isto é, a multiplicação de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todos a,b,c em *Z*:
a x (b x c) = (a x b) x c
2 x (3 x 7) = (2 x 3) x 7

Comutativa: Para todos a,b em *Z*:
a x b = b x a
3 x 7 = 7 x 3

Elemento neutro: Existe 1 em *Z*, que multiplicado por todo *z* em *Z*, proporciona o próprio *z*, isto é:
z x 1 = z
7 x 1 = 7

Elemento inverso: Para todo inteiro *z* diferente de zero, existe um inverso z^{-1}=1/z em *Z*, tal que
z x z^{-1} = z x (1/z) = 1
9 x 9^{-1} = 9 x (1/9) = 1

Distributiva: Para todos *a*,*b*,*c* em *Z*:
a x (b + c) = (a x b) + (a x c)
3 x (4+5) = (3 x 4) + (3 x 5)

Divisão de Números Inteiros

Dividendo |divisor dividendo:
Divisor = quociente 0
Quociente . divisor = dividendo

Sabemos que na divisão exata dos números naturais:
40 : 5 = 8, pois 5 . 8 = 40
36 : 9 = 4, pois 9 . 4 = 36

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros. Veja o cálculo:
(–20) : (+5) = q ⇨ (+5) . q = (–20) ⇨ q = (–4)
Logo: (–20) : (+5) = - 4

Considerando os exemplos dados, concluímos que, para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor. Daí:

- Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número inteiro positivo.
- Quando o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número inteiro negativo.
- A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto *Z*. Por exemplo, (+7) : (–2) ou (–19) : (–5) são divisões que não podem ser realizadas em *Z*, pois o resultado não é um número inteiro.
- No conjunto *Z*, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade da existência do elemento neutro.

1- Não existe divisão por zero.

Exemplo: (–15) : 0 não tem significado, pois não existe um número inteiro cujo produto por zero seja igual a –15.

2- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é zero, pois o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.

Exemplos: a) 0 : (–10) = 0   b) 0 : (+6) = 0   c) 0 : (–1) = 0

Potenciação de Números Inteiros

A potência a^n do número inteiro *a*, é definida como um produto de *n* fatores iguais. O número a é denominado a *base* e o número *n* é o *expoente*.
a^n = a x a x a x a x ... x a
a é multiplicado por *a n* vezes

Exemplos: 3^3 = (3) x (3) x (3) = 27
$(-5)^5$ = (-5) x (-5) x (-5) x (-5) x (-5) = -3125
$(-7)^2$ = (-7) x (-7) = 49
$(+9)^2$ = (+9) x (+9) = 81

- Toda potência de **base positiva** é um número **inteiro positivo**.

Exemplo: $(+3)^2$ = (+3) . (+3) = +9

- Toda potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **inteiro positivo**.

Exemplo: $(-8)^2 = (-8) . (-8) = +64$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente ímpar** é um número **inteiro negativo**.
Exemplo: $(-5)^3 = (-5) . (-5) . (-5) = -125$

Propriedades da Potenciação:

Produtos de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e somam-se os expoentes. $(-7)^3 . (-7)^6 = (-7)^{3+6} = (-7)^9$

Quocientes de Potências com bases iguais: Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes. $(+13)^8 : (+13)^6 = (+13)^{8-6} = (+13)^2$

Potência de Potência: Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. $[(+4)^5]^2 = (+4)^{5 . 2} = (+4)^{10}$

Potência de expoente 1: É sempre igual à base. $(+9)^1 = +9$ $(-13)^1 = -13$

Potência de expoente zero e base diferente de zero: É igual a 1. Exemplo: $(+14)^0 = 1$ $(-35)^0 = 1$

Radiciação de Números Inteiros

A raiz n-ésima (de ordem *n*) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo b* que elevado à potência *n* fornece o número *a*. O número *n* é o índice da raiz enquanto que o número *a* é o radicando (que fica sob o sinal do radical).

A raiz quadrada (de ordem 2) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo* que elevado ao quadrado coincide com o número *a*.

Observação: Não existe a raiz quadrada de um número inteiro negativo no conjunto dos números inteiros.

Erro comum: Frequentemente lemos em materiais didáticos e até mesmo ocorre em algumas aulas aparecimento de:
$\sqrt{9} = \pm 3$
mas isto está errado. O certo é:
$\sqrt{9} = +3$

Observamos que não existe um número inteiro não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro que elevado ao cubo seja igual ao número *a*. Aqui não restringimos os nossos cálculos somente aos números não negativos.

Exemplos

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.

(b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

(c) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.

(d) $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

Observação: Ao obedecer à regra dos sinais para o produto de números inteiros, concluímos que:

(a) Se o índice da raiz for par, não existe raiz de número inteiro negativo.

(b) Se o índice da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número inteiro.

Questões

1 - (TRF 2ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO – FCC/2012) Uma operação λ é definida por:

$w^{\lambda} = 1 - 6w$, para todo inteiro w.

Com base nessa definição, é correto afirmar que a soma $2^{\lambda} + (1^{\lambda})^{\lambda}$ é igual a

A) −20.
B) −15.
C) −12.
D) 15.
E) 20.

2 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Ruth tem somente R$ 2.200,00 e deseja gastar a maior quantidade possível, sem ficar devendo na loja.

Verificou o preço de alguns produtos:
TV: R$ 562,00
DVD: R$ 399,00
Micro-ondas: R$ 429,00
Geladeira: R$ 1.213,00

Na aquisição dos produtos, conforme as condições mencionadas, e pagando a compra em dinheiro, o troco recebido será de:

A) R$ 84,00
B) R$ 74,00
C) R$ 36,00
D) R$ 26,00
E) R$ 16,00

3 - (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Analise as operações a seguir:

$$I\ a^b a^c = a^x$$

$$II\ \frac{a^b}{a^c} = a^y$$

$$III\ (a^c)^2 = a^z$$

De acordo com as propriedades da potenciação, temos que, respectivamente, nas operações I, II e III:

A) x=b-c, y=b+c e z=c/2.
B) x=b+c, y=b-c e z=2c.
C) x=2bc, y=-2bc e z=2c.
D) x=c-b, y=b-c e z=c-2.
E) x=2b, y=2c e z=c+2.

4 - (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013) Multiplicando-se o maior número inteiro menor do que 8 pelo menor número inteiro maior do que - 8, o resultado encontrado será

A) - 72
B) - 63
C) - 56
D) - 49
E) – 42

5 - (SEPLAG - POLÍCIA MILITAR/MG - ASSISTENTE ADMINISTRATIVO - FCC/2012) Em um jogo de tabuleiro, Carla e Mateus obtiveram os seguintes resultados:

Carla	
1ª partida	Ganhou 520 pontos
2ª partida	Perdeu 220 pontos
3ª partida	Perdeu 485 pontos
4ª partida	Ganhou 635 pontos

Mateus	
1ª partida	Perdeu 280 pontos
2ª partida	Ganhou 675 pontos
3ª partida	Ganhou 295 pontos
4ª partida	Perdeu 115 pontos

Ao término dessas quatro partidas,

A) Carla perdeu por uma diferença de 150 pontos.
B) Mateus perdeu por uma diferença de 175 pontos.
C) Mateus ganhou por uma diferença de 125 pontos.
D) Carla e Mateus empataram.

6 – (Operador de máq./Pref.Coronel Fabriciano/MG) Quantos são os valores inteiros e positivos de x para os quais $\frac{x+15}{x+5}$ é um número inteiro?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

7- (CASA DA MOEDA) O quadro abaixo indica o número de passageiros num vôo entre Curitiba e Belém, com duas escalas, uma no Rio de Janeiro e outra em Brasília. Os números indicam a quantidade de passageiros que subiram no avião e os negativos, a quantidade dos que desceram em cada cidade.

Curtiba	+240
Rio de Janeiro	-194 +158
Brasília	-108 +94

O número de passageiros que chegou a Belém foi:

A) 362
B) 280
C) 240
D) 190
E) 135

Respostas

1 - RESPOSTA:"E".
Pela definição:
Fazendo w=2

$$2^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 2 = -11$$
$$1^{\lambda} = 1 - 6 \cdot 1 = -5$$
$$(1^{\lambda})^{\lambda} = 1 - 6 \cdot (-5) = 31$$
$$2^{\lambda} + (1^{\lambda})^{\lambda} = -11 + 31 = 20$$

2 - RESPOSTA: "D".
Geladeira + Microondas + DVD = 1213+429+399 = 2041
Geladeira + Microondas + TV = 1213+429+562 = 2204, extrapola o orçamento
Geladeira +TV + DVD=1213+562+399=2174, é a maior quantidade gasta possível dentro do orçamento.
Troco:2200-2174=26 reais

3 - RESPOSTA: "B".
I da propriedade das potências, temos:
$$a^{x} = a^{b+c} \Rightarrow x = b + c$$

$$II\ a^{y} = a^{b-c} \Rightarrow y = b - c$$

$$III\ a^{2c} = a^{z} \Rightarrow z = 2c$$

4 - RESPOSTA: "D".
Maior inteiro menor que 8 é o 7
Menor inteiro maior que -8 é o -7.
Portanto: 7 · (-7)=-49

5 - RESPOSTA: "C".
Carla: 520-220-485+635=450 pontos
Mateus: -280+675+295-115=575 pontos
Diferença: 575-450=125 pontos

6 - RESPOSTA:"B".
Fazendo substituição dos valores de x, dentro dos conjuntos do inteiros positivos temos:

$$x=0\ ;\frac{15}{5} = 3 \qquad x=1\ \frac{16}{6} = não\ é\ inteiro$$
$$\therefore\ x = 2\ \ \frac{17}{7} = não\ é\ inteiro$$

$x = 5\ \ \frac{20}{10} = 2$, logo os únicos números que satisfazem a condição é x= 0 e x=5 , dois números apenas.

7 - RESPOSTA:"D".
240- 194 +158 -108 +94 = 190

1.2 RAZÕES E PROPORÇÕES, NÚMEROS RACIONAIS, OPERAÇÕES E A RELAÇÃO DE ORDEM ENTRE NÚMEROS RACIONAIS, REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS RACIONAIS.

Números Racionais – Q

Um número racional é o que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são números inteiros, sendo que *n* deve ser diferente de zero. Frequentemente usamos *m/n* para significar a divisão de *m* por *n*.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos através da razão entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado por *Q*. Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

Q = { $\frac{m}{n}$: *m e n em Z, n diferente de zero}*
No conjunto *Q* destacamos os seguintes subconjuntos:

- Q* = conjunto dos racionais *não nulos*;
- Q_+ = conjunto dos racionais *não negativos*;
- Q^*_+ = conjunto dos racionais *positivos*;
- Q_- = conjunto dos racionais *não positivos*;
- Q^*_- = conjunto dos racionais *negativos*.

Representação Decimal das Frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que *p* não seja múltiplo de *q*. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, um número finito de algarismos. Decimais Exatos:

$\frac{2}{5} = 0,4$

$\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{35}{4} = 8,75$

$\frac{153}{50} = 3,06$

2º) O numeral decimal obtido possui, após a vírgula, infinitos algarismos (nem todos nulos), repetindo-se periodicamente. Decimais Periódicos ou Dízimas Periódicas:

$\frac{1}{3} = 0,333...$

$\frac{1}{22} = 0,04545...$

$\frac{167}{66} = 2,53030...$

Representação Fracionária dos Números Decimais

Trata-se do problema inverso: estando o número racional escrito na forma decimal, procuremos escrevê-lo na forma de fração. Temos dois casos:

1º) Transformamos o número em uma fração cujo numerador é o número decimal sem a vírgula e o denominador é composto pelo numeral 1, seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número decimal dado:

$0,9 = \frac{9}{10}$

$5,7 = \frac{57}{10}$

$0,76 = \frac{76}{100}$

$3,48 = \frac{348}{100}$

$0,005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

2º) Devemos achar a fração geratriz da dízima dada; para tanto, vamos apresentar o procedimento através de alguns exemplos:

Exemplo 1

Seja a dízima 0, 333... .

Façamos x = 0,333... e multipliquemos ambos os membros por 10: 10x = 0,333

Subtraindo, membro a membro, a primeira igualdade da segunda:

10x – x = 3,333... – 0,333... ⇒ 9x = 3 ⇒ x = 3/9

Assim, a geratriz de 0,333... é a fração $\frac{3}{9}$.

Exemplo 2

Seja a dízima 5, 1717...

Façamos x = 5,1717... e 100x = 517,1717... .
Subtraindo membro a membro, temos:
99x = 512 ⇒ x = 512/99

Assim, a geratriz de 5,1717... é a fração $\frac{512}{99}$.

Exemplo 3

Seja a dízima 1, 23434...

Façamos x = 1,23434... 10x = 12,3434... 1000x = 1234,34... .
Subtraindo membro a membro, temos:
990x = 1234,34... – 12,34... ⇒ 990x = 1222 ⇒ x = 1222/990

Simplificando, obtemos x = $\frac{611}{495}$, a fração geratriz da dízima 1, 23434...

Módulo ou valor absoluto: É a distância do ponto que representa esse número ao ponto de abscissa zero.

Exemplo: Módulo de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Módulo de $+\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$. Indica-se $\left|+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}\right|$

Números Opostos: Dizemos que $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são números racionais opostos ou simétricos e cada um deles é o oposto do outro. As distâncias dos pontos $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ ao ponto zero da reta são iguais.

Soma (Adição) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos a adição entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que a soma de frações, através de:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Propriedades da Adição de Números Racionais

O conjunto *Q* é fechado para a operação de adição, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional.

- Associativa: Para todos *a*, *b*, *c* em *Q*: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Comutativa: Para todos a, b em *Q*: $a + b = b + a$
- Elemento neutro: Existe 0 em *Q*, que adicionado a todo *q* em Q, proporciona o próprio *q*, isto é: $q + 0 = q$
- Elemento oposto: Para todo q em *Q*, existe -q em Q, tal que $q + (–q) = 0$

Subtração de Números Racionais

A subtração de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de adição do número *p* com o oposto de *q*, isto é: $p – q = p + (–q)$

Multiplicação (Produto) de Números Racionais

Como todo número racional é uma fração ou pode ser escrito na forma de uma fração, definimos o produto de dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, da mesma forma que o produto de frações, através de:

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O produto dos números racionais *a* e *b* também pode ser indicado por *a* × *b*, *a*x*b*, *a.b* ou ainda *ab* sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números racionais, devemos obedecer à mesma regra de sinais que vale em toda a Matemática:

(+1) × (+1) = (+1)
(+1) × (-1) = (-1)
(-1) × (+1) = (-1)
(-1) × (-1) = (+1)

Podemos assim concluir que o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo, mas o produto de dois números com sinais diferentes é negativo.

Propriedades da Multiplicação de Números Racionais

O conjunto *Q* é fechado para a multiplicação, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número racional.

- Associativa: Para todos a, b, c em *Q: a × (b × c) = (a × b) × c*
- Comutativa: Para todos a, b em *Q: a × b = b × a*
- Elemento neutro: Existe 1 em *Q*, que multiplicado por todo q em *Q*, proporciona o próprio q, isto é: *q × 1 = q*
- Elemento inverso: Para todo q = $\frac{a}{b}$ em *Q*, q diferente de zero, existe $q^{-1} = \frac{b}{a}$ em *Q*: $q \times q^{-1} = 1$ $\quad \frac{a}{b} \text{ x } \frac{b}{a} = 1$
- Distributiva: Para todos a, b, c em *Q: a × (b + c) = (a × b) + (a × c)*

Divisão de Números Racionais

A divisão de dois números racionais *p* e *q* é a própria operação de multiplicação do número *p* pelo inverso de *q*, isto é: $p \div q = p \times q^{-1}$

Potenciação de Números Racionais

A potência q^n do número racional *q* é um produto de *n* fatores iguais. O número *q* é denominado a base e o número *n* é o expoente.

$q^n = q \times q \times q \times q \times ... \times q$, (*q* aparece *n* vezes)

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

c) $(-5)^2 = (-5) . (-5) = 25$

d) $(+5)^2 = (+5) . (+5) = 25$

Propriedades da Potenciação: Toda potência com expoente 0 é igual a 1.

$$\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

- Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$$

- Toda potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} . \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

- Toda potência com expoente ímpar tem o mesmo sinal da base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$$

- Toda potência com expoente par é um número positivo.

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

- Produto de potências de mesma base. Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e somamos os expoentes.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 . \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right).\left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

- Quociente de potências de mesma base. Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

- Potência de Potência. Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes

$$\left[\left(\frac{1^2}{2}\right)\right]^3 = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{1^{2+2+2}}{2} = \frac{1^{3\times 2}}{2} = \frac{1^6}{2}$$

Radiciação de Números Racionais

Se um número representa um produto de dois ou mais fatores iguais, então cada fator é chamado raiz do número. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

4 Representa o produto 2 . 2 ou 2^2. Logo, 2 é a raiz quadrada de 4. Indica-se $\sqrt{4} = 2$.

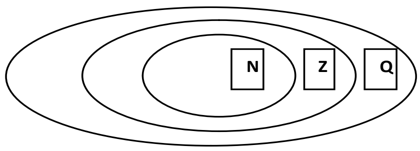
Exemplo 2

$\frac{1}{9}$ Representa o produto $\frac{1}{3} . \frac{1}{3}$ ou $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Logo, $\frac{1}{3}$ **é a raiz quadrada de** $\frac{1}{9}$ .Indica-se $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Exemplo 3

0,216 Representa o produto 0,6 . 0,6 . 0,6 ou $(0,6)^3$. Logo, 0,6 é a raiz cúbica de 0,216. Indica-se $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$.

Assim, podemos construir o diagrama:



Um número racional, quando elevado ao quadrado, dá o número zero ou um número racional positivo. Logo, os números racionais negativos não têm raiz quadrada em Q.

O número $\frac{-100}{9}$ não tem raiz quadrada em Q, pois tanto $\frac{-10}{3}$ como $\frac{+10}{3}$, quando elevados ao quadrado, dão $\frac{100}{9}$.
Um número racional positivo só tem raiz quadrada no conjunto dos números racionais se ele for um quadrado perfeito.

O número $\frac{2}{3}$ não tem raiz quadrada em Q, pois não existe número racional que elevado ao quadrado dê $\frac{2}{3}$.

Questões

1 - (PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Na escola onde estudo, ¼ dos alunos tem a língua portuguesa como disciplina favorita, 9/20 têm a matemática como favorita e os demais têm ciências como favorita. Sendo assim, qual fração representa os alunos que têm ciências como disciplina favorita?
A) 1/4
B) 3/10
C) 2/9
D) 4/5
E) 3/2

2 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Dirce comprou 7 lapiseiras e pagou R\$ 8,30, em cada uma delas. Pagou com uma nota de 100 reais e obteve um desconto de 10 centavos. Quantos reais ela recebeu de troco?
A) R\$ 40,00
B) R\$ 42,00
C) R\$ 44,00
D) R\$ 46,00
E) R\$ 48,00

3 - (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013) De um total de 180 candidatos, 2/5 estudam inglês, 2/9 estudam francês, 1/3estuda espanhol e o restante estuda alemão. O número de candidatos que estuda alemão é:
A) 6.
B) 7.
C) 8.
D) 9.
E) 10.

4 - (FUNDAÇÃO CASA – AGENTE DE APOIO OPERACIONAL – VUNESP/2013) Em um estado do Sudeste, um Agente de Apoio Operacional tem um salário mensal de: saláriobase R\$ 617,16 e uma gratificação de R\$ 185,15. No mês passado, ele fez 8 horas extras a R\$ 8,50 cada hora, mas precisou faltar um dia e foi descontado em R\$ 28,40. No mês passado, seu salário totalizou
A) R\$ 810,81.
B) R\$ 821,31.
C) R\$ 838,51.
D) R\$ 841,91.
E) R\$ 870,31.

5 - (Pref. Niterói) Simplificando a expressão abaixo

Obtém-se $\frac{1,3333+\frac{3}{2}}{1,5+\frac{4}{3}}$:
A) ½
B) 1
C) 3/2
D) 2
E) 3

6 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Em um jogo matemático, cada jogador tem direito a 5 cartões marcados com um número, sendo que todos os jogadores recebem os mesmos números. Após todos os jogadores receberem seus cartões, aleatoriamente, realizam uma determinada tarefa que também é sorteada. Vence o jogo quem cumprir a tarefa corretamente. Em uma rodada em que a tarefa era colocar os números marcados nos cartões em ordem crescente, venceu o jogador que apresentou a sequência

$A) -4;\ -1;\ \sqrt{16};\ \sqrt{25};\frac{14}{3}$

$B) -1;\ -4;\ \sqrt{16};\ \frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

$C) -1;\ -4;\ \frac{14}{3};\ \sqrt{16};;\ \sqrt{25}$

$D) -4;\ -1;\ \sqrt{16};\frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

$E) -4;\ -1;\ \frac{14}{3};\ \sqrt{16};\sqrt{25}$

7 – (Prof./Prefeitura de Itaboraí) Se x = 0,181818..., então o valor numérico da expressão:

$$\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}$$

A) 34/39
B) 103/147
C) 104/147
D) 35/49
E) 106/147

8 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Mariana abriu seu cofrinho com 120 moedas e separou-as:
− 1 real: ¼ das moedas
− 50 centavos: 1/3 das moedas

− 25 centavos: 2/5 das moedas
− 10 centavos: as restantes
Mariana totalizou a quantia contida no cofre em
A) R$ 62,20.
B) R$ 52,20.
C) R$ 50,20.
D) R$ 56,20.
E) R$ 66,20.

9 - (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Numa operação policial de rotina, que abordou 800 pessoas, verificou-se que 3/4 dessas pessoas eram homens e 1/5 deles foram detidos. Já entre as mulheres abordadas, 1/8 foram detidas.

Qual o total de pessoas detidas nessa operação policial?
A) 145
B) 185
C) 220
D) 260
E) 120

10 - (PREF. JUNDIAI/SP – AGENTE DE SERVIÇOS OPERACIONAIS – MAKIYAMA/2013) Quando perguntado sobre qual era a sua idade, o professor de matemática respondeu:

"O produto das frações 9/5 e 75/3 fornece a minha idade!".
Sendo assim, podemos afirmar que o professor tem:
A) 40 anos.
B) 35 anos.
C) 45 anos.
D) 30 anos.
E) 42 anos.

Respostas

1 - RESPOSTA: "B".
Somando português e matemática:

$$\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=\frac{5+9}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

O que resta gosta de ciências:

$$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$$

2 - RESPOSTA: "B".

$$8{,}3\cdot 7=58{,}1$$

Como recebeu um desconto de 10 centavos, Dirce pagou 58 reais

Troco:100-58=42 reais

3 - RESPOSTA: "C".

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$$

Mmc(3,5,9)=45

$$\frac{18+10+15}{45}=\frac{43}{45}$$

O restante estuda alemão: 2/45

$$180\cdot\frac{2}{45}=8$$

4 - RESPOSTA: "D".

$$salário\ mensal: 617{,}16+185{,}15=802{,}31$$
$$horas\ extras: 8{,}5\cdot 8=68$$
$$mês\ passado: 802{,}31+68{,}00-28{,}40=841{,}91$$

Salário foi R$ 841,91.

5 - RESPOSTA: "B".
1,3333= 12/9 = 4/3
1,5 = 15/10 = 3/2

$$\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{\frac{17}{6}}{\frac{17}{6}}=1$$

6 - RESPOSTA: "D".

$$\sqrt{16}=4$$
$$\sqrt{25}=5$$
$$\frac{14}{3}=4{,}67$$

A ordem crescente é : $-4;\ -1;\ \sqrt{16};\frac{14}{3};\ \sqrt{25}$

7 - RESPOSTA: "B".
x=0,181818... temos então pela transformação na fração geratriz: 18/99 = 2/11, substituindo:

$$\frac{\frac{2}{11}+\frac{1}{\frac{2}{11}}-1}{\frac{2}{11}+\frac{1}{\frac{2}{11}}+1}=\frac{\frac{2}{11}+\frac{11}{2}-1}{\frac{2}{11}+\frac{11}{2}+1}=\frac{\frac{4+121-22}{22}}{\frac{4+121+22}{22}}=\frac{103}{147}$$

8 - RESPOSTA: "A".

$$1\ real: 120\cdot\frac{1}{4}=30\ moedas$$

$$50\ centavos: \frac{1}{3}\cdot 120=40\ moedas$$

$$10\ centavos: 120-118\ moedas=2\ moedas$$

$$30+40\cdot 0{,}5+48\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}10=62{,}20$$

Mariana totalizou R$ 62,20.

9 - RESPOSTA: "A".

$$800\cdot\frac{3}{4}=600\ homens$$

$$600 \cdot \frac{1}{5} = 120\ homens\ detidos$$

Como 3/4 eram homens, 1/4 eram mulheres

$800 \cdot \frac{1}{4} = 200\ mulheres$ ou 800-600=200 mulheres

$$200 \cdot \frac{1}{8} = 25\ mulhers\ detidas$$

Total de pessoas detidas: 120+25=145

10 - RESPOSTA: “C”.

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{75}{3} = \frac{675}{15} = 45\ anos$$

Razão

Sejam dois números reais *a* e *b*, com *b ≠ 0*. Chama-se razão entre *a* e *b* (nessa ordem) o quociente a b, ou .

A razão é representada por um número racional, mas é lida de modo diferente.

Exemplos

a) A fração $\frac{3}{5}$ lê-se: “três quintos”.

b) A razão $\frac{3}{5}$ lê-se: “3 para 5”.

Os termos da razão recebem nomes especiais.

a) Na fração $\frac{3}{5}$ — O número 3 é **numerador**; O número 5 é **denominador**

a) Na razão $\frac{3}{5}$ — O número 3 é **antecedente**; O número 5 é **consequente**

Exemplo 1

A razão entre 20 e 50 é $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$; já a razão entre 50 e 20 é $\frac{50}{20} = \frac{5}{2}$.

Exemplo 2

Numa classe de 42 alunos há 18 rapazes e 24 moças. A razão entre o número de rapazes e o número de moças é $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, o que significa que para “cada 3 rapazes há 4 moças”. Por outro lado, a razão entre o número de rapazes e o total de alunos é dada por $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$, o que equivale a dizer que “de cada 7 alunos na classe, 3 são rapazes”.

Razão entre grandezas de mesma espécie

A razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplo

Uma sala tem 18 m². Um tapete que ocupar o centro dessa sala mede 384 dm². Vamos calcular a razão entre a área do tapete e a área da sala.

Primeiro, devemos transformar as duas grandezas em uma mesma unidade:

Área da sala: 18 m² = 1 800 dm²

Área do tapete: 384 dm²

Estando as duas áreas na mesma unidade, podemos escrever a razão:

$$\frac{384dm^2}{1800dm^2} = \frac{384}{1800} = \frac{16}{75}$$

Razão entre grandezas de espécies diferentes

Exemplo 1

Considere um carro que às 9 horas passa pelo quilômetro 30 de uma estrada e, às 11 horas, pelo quilômetro 170.

Distância percorrida: 170 km – 30 km = 140 km

Tempo gasto: 11h – 9h = 2h

Calculamos a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso:

$$\frac{140km}{2h} = 70km/h$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **velocidade média**.

Observe que:

- as grandezas “quilômetro e hora” são de naturezas diferentes;

- a notação km/h (lê-se: “quilômetros por hora”) deve acompanhar a razão.

Exemplo 2

A Região Sudeste (Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo) tem uma área aproximada de 927 286 km² e uma população de 66 288 000 habitantes, aproximadamente, segundo estimativas projetadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para o ano de 1995.

Dividindo-se o número de habitantes pela área, obteremos o número de habitantes por km² (hab./km²):

$$\frac{6628000}{927286} \cong 71{,}5hab./km^2$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **densidade demográfica**.

A notação hab./km² (lê-se: "habitantes por quilômetro quadrado") deve acompanhar a razão.

Exemplo 3

Um carro percorreu, na cidade, 83,76 km com 8 L de gasolina. Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumidos, teremos o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro de gasolina:

$$\frac{83{,}76km}{8l} \cong 10{,}47km/l$$

A esse tipo de razão dá-se o nome de **consumo médio**.

A notação km/l (lê-se: "quilômetro por litro") deve acompanhar a razão.

Exemplo 4

Uma sala tem 8 m de comprimento. Esse comprimento é representado num desenho por 20 cm. Qual é a escala do desenho?

$$Escala = \frac{comprimento \bullet no \bullet desenho}{comprimento \bullet real} = \frac{20cm}{8m} = \frac{20cm}{800cm} = \frac{1}{40} ou 1:40$$

A razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real, chama-se **Escala.**

Proporção

A igualdade entre duas razões recebe o nome de **proporção**.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 está para 5 assim como 6 está para 10"), os números 3 e 10 são chamados extremos, e os números 5 e 6 são chamados meios.

Observemos que o produto 3 x 10 = 30 é igual ao produto 5 x 6 = 30, o que caracteriza a propriedade fundamental das proporções:

"Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Exemplo 1

Na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, temos 2 x 9 = 3 x 6 = 18;

e em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, temos 4 x 4 = 1 x 16 = 16.

Exemplo 2

Na bula de um remédio pediátrico recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg do "peso" da criança.

Se uma criança tem 12 kg, a dosagem correta *x* é dada por:

$$\frac{5gotas}{2kg} = \frac{x}{12kg} \rightarrow x = 30gotas$$

Por outro lado, se soubermos que foram corretamente ministradas 20 gotas a uma criança, podemos concluir que seu "peso" é 8 kg, pois:

$$\frac{5gotas}{2kg} = 20gotas/p \rightarrow p = 8kg$$

(nota: o procedimento utilizado nesse exemplo é comumente chamado de regra de três simples.)

Propriedades da Proporção

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios: essa propriedade possibilita reconhecer quando duas razões formam ou não uma proporção.

$\frac{4}{3} e \frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois

Produtos dos extremos $\leftarrow \underbrace{4.9}_{36} = \underbrace{3.12}_{36} \rightarrow$ Produtos dos meios.

A soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{5+2}{5} = \frac{10+4}{10} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{14}{10} \right.$$

ou

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow \left\{ \frac{5+2}{2} = \frac{10+4}{4} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{14}{4} \right.$$

A diferença entre os dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo termo) assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro (ou para o quarto termo).

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \frac{4-3}{4} = \frac{8-6}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \right.$$

ou

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow \left\{ \frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \right.$$

A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{12+3}{8+2} = \frac{12}{8} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{12}{8} \right.$$

ou

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \frac{12+3}{8+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \right.$$

A diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3-1}{15-5}=\frac{3}{15}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{3}{15}\end{cases}$$

ou

$$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3-1}{15-5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\end{cases}$$

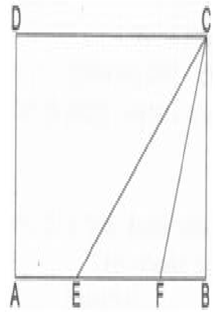
Questões

1 - (VUNESP - AgSegPenClasseI-V1 - 2012) – Em um concurso participaram 3000 pessoas e foram aprovadas 1800. A razão do número de candidatos aprovados para o total de candidatos participantes do concurso é:
A) 2/3
B) 3/5
C) 5/10
D) 2/7
E) 6/7

2 – (VNSP1214/001-AssistenteAdministrativo-I – 2012) – Em uma padaria, a razão entre o número de pessoas que tomam café puro e o número de pessoas que tomam café com leite, de manhã, é 2/3. Se durante uma semana, 180 pessoas tomarem café de manhã nessa padaria, e supondo que essa razão permaneça a mesma, pode-se concluir que o número de pessoas que tomarão café puro será:
A) 72
B) 86
C) 94
D) 105
E) 112

3 - (PREF. NEPOMUCENO/MG – TÉCNICO EM SEGURANÇA DO TRABALHO – CONSULPLAN/2013) Num zoológico, a razão entre o número de aves e mamíferos é igual à razão entre o número de anfíbios e répteis. Considerando que o número de aves, mamíferos e anfíbios são, respectivamente, iguais a 39, 57 e 26, quantos répteis existem neste zoológico?
A) 31
B) 34
C) 36
D) 38
E) 43

4 - (TRT - Técnico Judiciário) Na figura abaixo, os pontos E e F dividem o lado AB do retângulo ABCD em segmentos de mesma medida.



A razão entre a área do triângulo (CEF) e a área do retângulo é:
a) 1/8
b) 1/6
c) 1/2
d) 2/3
e) 3/4

5 - (CREFITO/SP – ALMOXARIFE – VUNESP/2012) Na biblioteca de uma faculdade, a relação entre a quantidade de livros e de revistas era de 1 para 4. Com a compra de novos exemplares, essa relação passou a ser de 2 para 3.

Assinale a única tabela que está associada corretamente a essa situação.

A)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	50	200
Após a compra	200	300

B)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	50	200
Após a compra	300	200

C)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	50
Após a compra	200	300

D)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	50
Após a compra	300	200

E)

	Nº de livros	Nº de revistas
Antes da compra	200	200
Após a compra	50	300

6 - (CREFITO/SP – ALMOXARIFE – VUNESP/2012) Uma rede varejista teve um faturamento anual de 4,2 bilhões de reais com 240 lojas em um estado. Considerando que esse faturamento é proporcional ao número de lojas, em outro estado em que há 180 lojas, o faturamento anual, em bilhões de reais, foi de

A) 2,75
B) 2,95
C) 3,15
D) 3,35
E) 3,55

7 - (PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) De cada dez alunos de uma sala de aula, seis são do sexo feminino. Sabendo que nesta sala de aula há dezoito alunos do sexo feminino, quantos são do sexo masculino?

A) Doze alunos.
B) Quatorze alunos.
C) Dezesseis alunos.
D) Vinte alunos.

8 - (TJ/SP – ESCREVENTE TÉCNICO JUDICIÁRIO – VUNESP/2013) Em um dia de muita chuva e trânsito caótico, 2/5 dos alunos de certa escola chegaram atrasados, sendo que 1/4 dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso. Sabendo que todos os demais alunos chegaram no horário, pode-se afirmar que nesse dia, nessa escola, a razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e número de alunos que chegaram no horário, nessa ordem, foi de

A) 2:3
B) 1:3
C) 1:6
D) 3:4
E) 2:5

9 - (PMPP1101/001-Escriturário-I-manhã – 2012) – A razão entre as idades de um pai e de seu filho é hoje de 5/2. Quando o filho nasceu, o pai tinha 21 anos. A idade do filho hoje é de

A) 10 anos
B) 12 anos
C) 14 anos
D) 16 anos
E) 18 anos

10 - (FAPESP – ANALISTA ADMINISTRATIVO – VUNESP/2012) Em uma fundação, verificou-se que a razão entre o número de atendimentos a usuários internos e o número de atendimento total aos usuários (internos e externos), em um determinado dia, nessa ordem, foi de 3/5. Sabendo que o número de usuários externos atendidos foi 140, pode-se concluir que, no total, o número de usuários atendidos foi

A) 84
B) 100
C) 217
D) 280
E) 350

Respostas

1 – Resposta “B”

$$\frac{\textit{número de candidatos aprovados}}{\textit{número total de candidatos}} = \frac{1800}{3000} = \frac{18^{3}}{30^{5}} = \frac{3}{5}$$

2 – Resposta “A”

Sejam CP e CL o número de pessoas que consumiram café puro e café com leite respectivamente. Como na semana o número total de pessoas que consumiram café foi de 180, temos que:

CP+CL = 180

A relação encontrada entre eles é de $\frac{2}{3}$; $\frac{CP}{CL} = \frac{2}{3}$ assim aplicando a propriedade da proporção teremos:

$\frac{CP+CL}{CP} = \frac{2+3}{2}$ ➔ $\frac{180}{CP} = \frac{5}{2}$ ➔ 180.2 = CP.5 ➔ CP = $\frac{360}{5}$ ➔ CP = 72

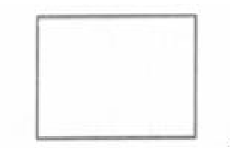
3 - RESPOSTA: “D”

$$\frac{Aves}{mamíferos} = \frac{anfíbios}{répteis}$$

$\frac{39}{57} = \frac{26}{répteis}$ ∴ Aplicando-se o produto dos meios pelos extremos temos:

$$répteis = 57 \cdot \frac{26}{39} = 38$$

4 - Resposta “B”

04)  $A = x \,.\, y \quad A\Delta = \frac{1}{2} \,.\, \frac{x}{3} \,.\, y = \frac{xy}{6}$

$\frac{x}{3}\ \frac{x}{3}\ \frac{x}{3}\ \frac{A\Delta}{A} = \frac{6}{xy} = \frac{1}{6}$

Letra B

5 - RESPOSTA: “A”
Para cada 1 livro temos 4 revistas
Significa que o número de revistas é 4x o número de livros.
50 livros: 200 revistas

Depois da compra
2 livros :3 revistas
200 livros: 300 revistas
6 - RESPOSTA: “C”

$$\frac{4,2}{240} = \frac{x}{180}$$

240.x = 4,2.180 → 240x = 756 → x = 3,15 bilhões

7 - RESPOSTA: “A”
Como 6 são do sexo feminino, 4 são do sexo masculino(10-6 = 4) .Então temos a seguinte razão: $\frac{6}{4}$

$\frac{6}{4} = \frac{18}{x}$ ➔ 6x = 72 ➔ x = 12

8- RESPOSTA: “C”

Se 2/5 chegaram atrasados

$$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$ chegaram no horário

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$ tiveram mais de 30 minutos de atraso

$$razão=\frac{tiveram\ mais\ de\ 30\ min\ de\ atraso}{chegaram\ no\ horário}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}$$

$$razão=\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{3}=\frac{1}{6}\ ou\ 1:6$$

9 – RESPOSTA: "C"

A razão entre a idade do pai e do filho é respectivamente $\frac{P}{F}=\frac{5}{2}$, se quando o filho nasceu o pai tinha 21, significa que hoje o pai tem x + 21 , onde x é a idade do filho. Montando a proporção teremos:

$$\frac{x+21}{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2.(x+21)=5x\ \Rightarrow 2x+42$$
$$=5x\ \Rightarrow 5x-2x=42\Rightarrow 3x=42\Rightarrow x=\frac{42}{3}$$

$$x=14\ anos$$

10 - RESPOSTA: "E"
Usuários internos: I
Usuários externos : E

$\frac{I}{I+E}=\frac{3}{5}=\frac{I}{I+140}$ ➔ 5I = 3I+420 ➔2I = 420 ➔I = 210

I+E = 210+140 = 350

1.3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PA E PG).

Progressão Aritmética (PA)

Podemos, no nosso dia-a-dia, estabelecer diversas sequências como, por exemplo, a sucessão de cidades que temos numa viagem de automóvel entre Brasília e São Paulo ou a sucessão das datas de aniversário dos alunos de uma determinada escola.

Podemos, também, adotar para essas sequências uma ordem numérica, ou seja, adotando a_1 para o 1º termo, a_2 para o 2º termo até a_n para o n-ésimo termo. Dizemos que o termo a_n é também chamado termo geral das sequências, em que *n* é um número natural diferente de zero. Evidentemente, daremos atenção ao estudo das sequências numéricas.

As sequências podem ser finitas, quando apresentam um último termo, ou, infinitas, quando não apresentam um último termo. As sequências infinitas são indicadas por reticências no final.

Exemplos:

- Sequência dos números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 11$; $a_6 = 13$ etc.
- Sequência dos números ímpares positivos: (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Notemos que esta é uma sequência infinita com $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 9$; $a_6 = 11$ etc.
- Sequência dos algarismos do sistema decimal de numeração: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Notemos que esta é uma sequência finita com $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$; $a_6 = 5$; $a_7 = 6$; $a_8 = 7$; $a_9 = 8$; $a_{10} = 9$.

1. Igualdade

As sequências são apresentadas com os seus termos entre parênteses colocados de forma ordenada. Sucessões que apresentarem os mesmos termos em ordem diferente serão consideradas sucessões diferentes.

Duas sequências só poderão ser consideradas iguais se, e somente se, apresentarem os mesmos termos, na mesma ordem.

Exemplo

A sequência (x, y, z, t) poderá ser considerada igual à sequência (5, 8, 15, 17) se, e somente se, x = 5; y = 8; z = 15; e t = 17.

Notemos que as sequências (0, 1, 2, 3, 4, 5) e (5, 4, 3, 2, 1) são diferentes, pois, embora apresentem os mesmos elementos, eles estão em ordem diferente.

2. Formula Termo Geral

Podemos apresentar uma sequência através de uma determina o valor de cada termo a_n em função do valor de *n*, ou seja, dependendo da posição do termo. Esta formula que determina o valor do termo a_n e chamada formula do termo geral da sucessão.

Exemplos

- Determinar os cincos primeiros termos da sequência cujo termo geral e igual a:

$a_n = n – 2n$,com n € N* ⇨
Teremos:
$A_1 = 1^2 – 2 . 1$ ⇨ $a_1 = 1$
$A_2 = 2^2 – 2 . 2$ ⇨ $a_2 = 0$
$A_3 = 3^2 – 2 . 3$ ⇨ $a_3 = 3$
$A_4 = 4^2 – 4 . 2$ ⇨ $a_4 = 8$
$A_5 = 5^5 – 5 . 2$ ⇨ $a_5 = 15$

- Determinar os cinco primeiros termos da seqüência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 3 . n + 2$, com n € N*.
$a_1 = 3 . 1 + 2$ ⇨ $a_1 = 5$
$a_2 = 3 . 2 + 2$ ⇨ $a_2 = 8$
$a_3 = 3 . 3 + 2$ ⇨ $a_3 = 11$
$a_4 = 3 . 4 + 2$ ⇨ $a_4 = 14$
$a_5 = 3 . 5 + 2$ ⇨ $a_5 = 17$

- Determinar os termos a_{12} e a_{23} da sequência cujo termo geral é igual a:

$a_n = 45 – 4 + n$, com n € N*.

Teremos:
$a_{12} = 45 – 4 . 12 \Rightarrow a_{12} = -3$
$a_{23} = 45 – 4 . 23 \Rightarrow a_{23} = -47$

3. Lei de Recorrências
Uma sequência pode ser definida quando oferecemos o valor do primeiro termo e um "caminho" (uma formula) que permite a determinação de cada termo conhecendo-se o seu antecedente. Essa forma de apresentação de uma sucessão é dita de recorrências.

Exemplos
- Escrever os cinco primeiros termos de uma sequência em que:
$a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2 . a_n - 4$, em que n € N*.

Teremos:
$a_1 = 3$
$a_2 = 2 . a_1 – 4 \Rightarrow a_2 = 2 . 3 – 4 \Rightarrow a_2 = 2$
$a_3 = 2 . a_2 – 4 \Rightarrow a_3 = 2 . 2 - 4 \Rightarrow a_3 = 0$
$a_4 = 2 . a_3 – 4 \Rightarrow a_4 = 2 . 0 - 4 \Rightarrow a_4 = -4$
$a_5 = 2 . a_4 – 4 \Rightarrow a_5 = 2 .(-4) – 4 \Rightarrow a_5 = -12$

- Determinar o termo a_5 de uma sequência em que:
$a_1 = 12$ e $a_{n+1} = a_n – 2$, em que n € N*.

$a_2 = a_1 – 2 \rightarrow a_2 = 12 – 2 \rightarrow a_2=10$
$a_3 = a_2 – 2 \rightarrow a_3 = 10 – 2 \rightarrow a_3 = 8$
$a_4 = a_3 – 2 \rightarrow a_4 = 8 – 2 \rightarrow a_4 = 6$
$a_5 = a_4 – 2 \rightarrow a_5 = 6 – 2 \rightarrow a_5 = 4$

Observação 1

Devemos observar que a apresentação de uma sequência através do termo geral é mais pratica, visto que podemos determinar um termo no "meio" da sequência sem a necessidade de determinarmos os termos intermediários, como ocorre na apresentação da sequência através da lei de recorrências.

Observação 2

Algumas sequências não podem, pela sua forma "desorganizada" de se apresentarem, ser definidas nem pela lei das recorrências, nem pela formula do termo geral. Um exemplo de uma sequência como esta é a sucessão de números naturais primos que já "destruiu" todas as tentativas de se encontrar uma formula geral para seus termos.

4. Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PA, é possível, através de artifícios de resolução, tornar o procedimento mais simples:
PA com três termos: (a – r), a e (a + r), razão igual a r.
PA com quatro termos: (a – 3r), (a – r), (a + r) e (a + 3r), razão igual a 2r.
PA com cinco termos: (a – 2r), (a – r), a, (a + r) e (a + 2r), razão igual a r.

Exemplo

- Determinar os números a, b e c cuja soma é, igual a 15, o produto é igual a 105 e formam uma PA crescente.

Teremos:
Fazendo a = (b – r) e c = (b + r) e sendo a + b + c = 15, teremos:
$(b – r) + b + (b + r) = 15 \rightarrow 3b = 15 \rightarrow b = 5$.

Assim, um dos números, o termo médio da PA, já é conhecido.
Dessa forma a sequência passa a ser:
(5 – r), 5 e (5 + r), cujo produto é igual a 105, ou seja:

$(5 – r) .5 . (5 + r) = 105 \rightarrow 5^2 – r^2 = 21$
$r^2 = 4 \rightarrow 2$ ou r = -2.
Sendo a PA crescente, ficaremos apenas com r= 2.
Finalmente, teremos a = 3, b = 5 e c= 7.

5. Propriedades

P_1: para três termos consecutivos de uma PA, o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:
I - $a_n = a_{n-1} + r$
II - $a_n = a_{n+1} –r$

Fazendo I + II, obteremos:
$2a_n = a_{n-1} + r + a_n +1 - r$
$2a_n = a_{n-1+} a_n + 1$

Logo: $a_n = a_n$-1 + $\dfrac{an+1}{2}$

Portanto, para três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a media aritmética dos outros dois termos.

6. Termos Equidistantes dos Extremos

Numa sequência finita, dizemos que dois termos são equidistantes dos extremos se a quantidade de termos que precederem o primeiro deles for igual à quantidade de termos que sucederem ao outro termo. Assim, na sucessão:

$(a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_p,..., a_k,..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, temos:

a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos;
a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos;
a_4 a_{n-3} são termos equidistantes dos extremos.

Notemos que sempre que dois termos são equidistantes dos extremos, a soma dos seus índices é igual ao valor de n + 1. Assim sendo, podemos generalizar que, se os termos a_p e a_k são equidistantes dos extremos, então: p + k = n+1.

Propriedade

Numa PA com *n* termos, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PA de n termos, a_p e a_k termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:
I - $a_p = a_1 + (p - 1) . r \Rightarrow ap = a_1 + p . r - r$
II - $a_k = a_1 + (k - 1) . r \Rightarrow ak = a_1 + k . r - r$
Fazendo I + II, teremos:
$A_p + a_k = a_1 + p . r - r + a_1 + k . r - r$
$A_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 1 - 1) . r$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n + 1 - 1) . r$
$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n - 1) . r$
$a_p + a_k = a_1 + a_n$

Portanto numa PA com *n* termos, em que *n* é um numero ímpar, o termo médios (a_m) é a media aritmética dos extremos.

$$A_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

7. Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PA

Vamos considerar a PA (a_1, a_2, a_3,…,a_{n-2}, a_{n-1},a_n) e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + … + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (igualdade I)

Podemos escrever também:
$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ (igualdade II)

Somando-se I e II, temos:
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + … + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$
Considerando que todas estas parcelas, colocadas entre parênteses, são formadas por termos equidistantes dos extremos e que a soma destes termos é igual à soma dos extremos, temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) +$
$+… + (a_1 + a_n) \rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) . n$

E, assim, finalmente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exemplo

- Ache a soma dos sessenta primeiros termos da PA (2 , 5, 8,...).

Dados: $a_1 = 2$
$r = 5 - 2 = 3$

Calculo de a_{60}:
$A_{60} = a_1 + 59r \rightarrow a_{60} = 2 + 59 . 3$
$a_{60} = 2 + 177$
$a_{60} = 179$

Calculo da soma:

]
$$Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow S60 = \frac{(a_1 + a_{60}).60}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(2 + 179).60}{2}$$

$S_{60} = 5430$

Resposta: 5430

Progressão Geométrica (PG)

PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o anterior multiplicado por uma constante q chamada razão da PG.
$a_{n+1} = a_n . q$
Com a_1 conhecido e n € N*

Exemplos

- (3, 6, 12, 24, 48,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão q = 2.

- (-36, -18, -9, $\frac{-9}{2}$, $\frac{-9}{4}$,...) é uma PG de primeiro termo a_1= -36 e razão q = $\frac{1}{2}$.

- (15, 5, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 15$ e razão q = $\frac{1}{3}$.

- (-2, -6, -18, -54, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = -2$ e razão q = 3.
- (1, -3, 9, -27, 81, -243, ...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão q = -3.
- (5, 5, 5, 5, 5, 5,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão q = 1.
- (7, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 7$ e razão q = 0.
- (0, 0, 0, 0, 0, 0,...) é uma PG de primeiro termo $a_1 = 0$ e razão q qualquer.

Observação: Para determinar a razão de uma PG, basta efetuar o quociente entre dois termos consecutivos: o posterior dividido pelo anterior.

$$q = \frac{a_n + 1}{a_n} (a_n \neq 0)$$

Classificação

As classificações geométricas são classificadas assim:
- Crescente: Quando cada termo é maior que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e q > 1 ou quando $a_1 < 0$ e 0 < q < 1.

- Decrescente: Quando cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.

- Alternante: Quando cada termo apresenta sinal contrario ao do anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

- Constante: Quando todos os termos são iguais. Isto ocorre quando q = 1. Uma PG constante é também uma PA de razão r = 0. A PG constante é também chamada de PG estacionaria.

- Singular: Quando zero é um dos seus termos. Isto ocorre quando $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

Formula do Termo Geral

A definição de PG está sendo apresentada por meio de uma lei de recorrências, e nos já aprendemos nos módulos anteriores que a formula do termo geral é mais pratica. Por isso, estaremos, neste item, procurando estabelecer, a partir da lei de recorrências, a fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Vamos considerar uma PG de primeiro termo a1 e razão q. Assim, teremos:

$a_2 = a_1 . q$
$a_3 = a_2 . q = a_1 . q^2$
$a_4 = a_3 . q = a_1 . q^3$
$a_5 = a_4 . q = a_1 . q^4$
. .
. .
. .
$a_n = a_1 . q^{n-1}$

Exemplos

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão q = 3, temos o termo geral na igual a:

$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 2 . 3^{n-1}$
Assim, se quisermos determinar o termo a_5 desta PG, faremos:
$A_5 = 2 . 3^4 \rightarrow a^5 = 162$

- Numa PG de termo $a_1 = 15$ e razão q = , temos o termo geral na igual a:
$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 15 . ^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_6 desta PG, faremos:

$A_6 = 15 . \frac{(1).5}{2} \rightarrow a_6 = \frac{5}{81}$

- Numa PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão = -3 temos o termo geral na igual a:
$a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 . (-3)^{n-1}$

Assim, se quisermos determinar o termo a_4 desta PG, faremos:
$A_4 = 1 . (-3)^3 \rightarrow a_4 = -27$

Artifícios de Resolução

Em diversas situações, quando fazemos uso de apenas alguns elementos da PG, é possível através de alguns elementos de resolução, tornar o procedimento mais simples.

PG com três termos:

$\frac{a}{q}$ a; aq

PG com quatro termos:

$\frac{a}{q^3}; \frac{q}{q}$; aq; aq^3

PG com cinco termos:

$\frac{a}{q^2}; \frac{q}{q}$; a; aq; aq^2

Exemplo

Considere uma PG crescente formada de três números. Determine esta PG sabendo que a soma destes números é 13 e o produto é 27.

Vamos considerar a PG em questão formada pelos termos a, b e c, onde a = e c = b . q.

Assim,

$\frac{b}{q} . b . bq = 27 \rightarrow b^3 = 27 \rightarrow b = 3.$

Temos:

$\frac{3}{q} + 3 + 3q = 13 \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow$

$q = 3$ ou $q = \frac{1}{3}$

Sendo a PG crescente, consideramos apenas q = 3. E, assim, a nossa PG é dada pelos números: 1, 3 e 9.

Propriedades

P_1**:** Para três termos consecutivos de uma PG, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Exemplo

Vamos considerar três termos consecutivos de uma PG: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Podemos afirmar que:

I – $a_n = a_{n-1} . q$ e
II – $a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$

Fazendo I . II, obteremos:

$(a_n)^2 = (a_{n-1} . q). (\frac{a_{n+1}}{q}) \Rightarrow (a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Logo: $(a_n)^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$

Observação: Se a PG for positive, o termo médio será a media geométrica dos outros dois:
$a_n = \sqrt{a_{n-1} . a_{n+1}}$

P_2**:** Numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Exemplo

Sejam, numa PG de n termos, a_p e a_k dois termos equidistantes dos extremos.

Teremos, então:
I – $a_p = a_1 \cdot q^{p-1}$
II – $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$

Multiplicando I por II, ficaremos com:
$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot q^{p-1} \cdot a_1 \cdot q^{k-1}$
$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{p-1+k-1}$

Considerando que p + k = n + 1, ficamos com:
$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$
Portanto, numa PG, com n termos, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto destes extremos.

Observação**:** Numa PG positiva, com *n* termos, onde *n* é um numero impar, o termo médio (a_m) é a media geométrica dos extremos ou de 2 termos equidistantes dos extremos.

$a_m = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$

Soma dos termos de uma PG

Soma dos *n* Primeiros Termos de uma PG

Vamos considerar a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), com q diferente de 1 e representar por Sn a soma dos seus n termos, ou seja:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
(igualdade I)

Podemos escrever, multiplicando-se, membro a membro, a igualdade (I) por q:

$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + ...+ q \cdot a_{n-2} +$
$+ q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$

Utilizando a formula do termo geral da PG, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, teremos:
$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n\ +a1} \cdot q^n$
(igualdade II)

Subtraindo-se a equação I da equação II, teremos:

$q \cdot S_n – S_n = a_1 \cdot q^n – a_1 \rightarrow s_n \cdot (q – 1) =$
$= a_1 \cdot (q^n – 1)$

E assim: $S_n = \dfrac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$

Se tivéssemos efetuado a subtração das equações em ordem inversa, a fórmula da soma dos termos da PG ficaria:

$S_n = \dfrac{a_1.(1+q^n)}{1-q}$

Evidentemente que por qualquer um dos “caminhos” o resultado final é o mesmo. É somente uma questão de forma de apresentação.

Observação: Para q = 1, teremos $s_n = n \cdot a_1$

Série Convergente – PG Convergente

Dada a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), chamamos de serie a sequência S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,..., S_{n-2}, s_{n-1}, s_n,tal que:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
.
.
.
$S_{n-2} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...+ a_{n-2}$
$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...+ a_{n-2} + a_{n-1}$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...+ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Vamos observar como exemplo, numa PG com primeiro termo $a_1 = 4$ e razão q = , à série que ela vai gerar.

Os termos que vão determinar a progressão geométrica são: (4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$ ...)

E, portanto, a série correspondente será:

$S_1 = 4$
$S_2 = 4 + 2 = 6$
$S_3 = 4 + 2 + 1 = 7$

$S_4 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

$S_5 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4} = 7,75$

$S_6 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{63}{8} = 7,875$

$S_7 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{127}{16} = 7,9375$

$S_8 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{255}{32} = 7,96875$

$S_9 = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{511}{64} = 7,984375$

$S_{10} = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{1023}{128} = 7,9921875$

Devemos notar que a cada novo termo calculado, na PG, o seu valor numérico cada vez mais se aproxima de zero. Dizemos que esta é uma progressão geométrica convergente.

Por outro lado, na serie, é cada vez menor a parcela que se acrescenta. Desta forma, o ultimo termos da serie vai tendendo a um valor que parece ser o limite para a série em estudo. No exemplo numérico, estudado anteriormente, nota-se claramente que este valor limite é o numero 8.

Bem, vamos dar a esta discussão um caráter matemático.

É claro que, para a PG ser convergente, é necessário que cada termo seja, um valor absoluto, inferior ao anterior a ele. Assim, temos que:

PG convergente → | q | < 1
ou
PG convergente → -1 < 1

Resta estabelecermos o limite da serie, que é o S_n para quando *n* tende ao infinito, ou seja, estabelecermos a soma dos infinitos termos da PG convergente.

Vamos partir da soma dos *n* primeiros termos da PG:

$$S_n = \frac{a_1.(1+q^n)}{1-q}$$

Estando q entre os números -1e 1 e, sendo n um expoente que tende a um valor muito grande, pois estamos somando os infinitos termos desta PG, é fácil deduzir que q^n vai apresentando um valor cada vez mais próximo de zero. Para valores extremamente grandes de *n* não constitui erro considerar que q^n é igual a zero. E, assim, teremos:

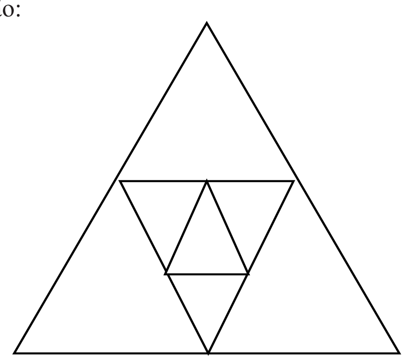
$$S = \frac{a^1}{1-q}$$

Observação: Quando a PG é não singular (sequência com termos não nulos) e a razão q é de tal forma que q | ≥ 1, a serie é divergente. Séries divergentes não apresentam soma finita.

Exemplos

- A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se o segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triangulo equilátero, obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:



Temos: perímetro do 1º triangulo = 30
perímetro do 2º triangulo = 15
perímetro do 3º triangulo = $\frac{15}{2}$

Logo, devemos calcular a soma dos termos da PG infinita 30, 15, $\frac{15}{2}$,... na qual a_1 = 30 e q =. $\frac{1}{2}$

$$S = \underline{a}_1 \rightarrow s = \frac{30}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} = 60.$$

Exercícios

1. Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:
a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

2. O valor de n que torna a sequência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:
a) [– 2, –1]
b) [– 1, 0]
c) [0, 1]
d) [1, 2]
e) [2, 3]

3. Os termos da sequência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; …) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que *n* pertence a N*, é o termo de ordem *n* dessa sequência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:
a) 58
b) 59
c) 60
d) 61
e) 62

4. A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; …) é:
a) 3,1
b) 3,9
c) 3,99
d) 3, 999
e) 4

5. A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15. A soma do sexto termo dessa PA., com o décimo quinto termo, vale:
a) 3,0
b) 1,0
c) 1,5
d) -1,5
e) -3,0

6. Os números que expressam os ângulos de um quadrilátero, estão em progressão geométrica de razão 2. Um desses ângulos mede:

a) 28°
b) 32°
c) 36°
d) 48°
e) 50°

7. Sabe-se que S = 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 999...9 onde a última parcela contém n algarismos. Nestas condições, o valor de 10n+1 - 9(S + n) é:
a) 1
b) 10
c) 100
d) -1
e) -10

8. Se a soma dos três primeiros termos de uma PG decrescente é 39 e o seu produto é 729, então sendo a, b e c os três primeiros termos, pede-se calcular o valor de a2 + b2 + c2.

9. O limite da expressão $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}}$ onde x é positivo, quando o número de radicais aumenta indefinidamente é igual a:
a) 1/x
b) x
c) 2x
d) n.x
e) 1978x

10. Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, que não são divisíveis nem por 5 nem por 7 ?

Respostas

1) Resposta "D".
Solução:
Sejam (a_1, a_2, a_3,…) a PA de r e (g_1, g_2, g_3, …) a PG de razão *q*. Temos como condições iniciais:
1 - $a_1 = g_1 = 4$
2 - $a_3 > 0$, $g_3 > 0$ e $a_3 = g_3$
3 - $a_2 = g_2 + 2$

Reescrevendo (2) e (3) utilizando as fórmulas gerais dos termos de uma PA e de uma PG e (1) obtemos o seguinte sistema de equações:
4 - $a_3 = a_1 + 2r$ e $g_3 = g_1 . q^2 \rightarrow 4 + 2r = 4q^2$
5 - $a_2 = a_1 + r$ e $g_2 = g_1 . q \rightarrow 4 + r = 4q + 2$

Expressando, a partir da equação (5), o valor de *r* em função de ***q*** e substituindo ***r*** em (4) vem:
5 - r = 4q + 2 – 4 → r = 4q – 2
4 - 4 + 2(4q – 2) = $4q^2 \rightarrow 4 + 8q – 4 = 4q^2 \rightarrow 4q^2 – 8q = 0$
→ q(4q – 8) = 0 → q = 0 ou 4q – 8 = 0 → q = 2

Como g3 > 0, *q* não pode ser zero e então q = 2. Para obter *r* basta substituir *q* na equação (5):
r = 4q – 2 → r = 8 – 2 = 6
Para concluir calculamos a_3 e g_3:
$a_3 = a_1 + 2r \rightarrow a_3 = 4 + 12 = 16$
$g_3 = g_1.q^2 \rightarrow g_3 = 4.4 = 16$

2) Resposta "B".
Solução: Para que a sequência se torne uma PA de razão *r* é necessário que seus três termos satisfaçam as igualdades (aplicação da definição de PA):
(1) -5n = 2 + 3n + r
(2) 1 – 4n = -5n + r
Determinando o valor de **r** em (1) e substituindo em (2):
(1) → r = -5n – 2 – 3n = -8n – 2
(2) → 1 – 4n = -5n – 8n – 2 → 1 – 4n = -13n – 2
→ 13n – 4n = -2 – 1 → 9n = -3 → n = -3/9 = -1/3

Ou seja, -1 < n < 0 e, portanto, a resposta correta é a b.

3) Resposta "B".
Solução: Primeiro, observe que os termos ímpares da sequência é uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 - (10; 11; 12; 13; …). Da mesma forma os termos pares é uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 - (8; 9; 10; 11; …).

Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:
(1) ai = a1 + (i - 1).1 = a1 + i – 1

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsecamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:
- Se n (índice da sucessão) é impar temos que n = 2i - 1, ou seja, i = (n + 1)/2;
- Se n é par temos n = 2i ou i = n/2.
Daqui e de (1) obtemos que:
$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1$ se n é ímpar
$a_n = 8 + (n/2) - 1$ se n é par
Logo:
$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$ e
$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$

E, portanto:
$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$.

4) Resposta "E".
Solução: Sejam S as somas dos elementos da sequência e S_1 a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009;…) de razão q = 10 - 1 = 0,1. Assim:
$S = 3 + S_1$
Como -1 < q < 1 podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1:
$S_1 = 0,9/(1 - 0,1) = 0,9/0,9 = 1 \rightarrow S = 3 + 1 = 4$

5) Resposta "D".
Solução: Aplicando a fórmula da soma dos 20 primeiros termos da PA:
$S_{20} = 20(a_1 + a_{20})/2 = -15$
Na PA finita de 20 termos, o sexto e o décimo quinto são equidistantes dos extremos, uma vez que:
15 + 6 = 20 + 1 = 21
E, portanto:
$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20}$

Substituindo este valor na primeira igualdade vem:
$20(a_6 + a_{15})/2 = -15 \rightarrow 10(a6 + a15) = -15 \rightarrow a_6 + a_{15} = -15/10 = -1,5$.

6) Resposta "D".

Solução: Seja x o menor ângulo interno do quadrilátero em questão. Como os ângulos estão em Progressão Geométrica de razão 2, podemos escrever a PG de 4 termos:

(**x, 2x, 4x, 8x**).

Ora, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360º.

Logo,

x + 2x + 4x + 8x = 360º

15.x = 360º

Portanto, **x = 24º**. Os ângulos do quadrilátero são, portanto: **24º, 48º, 96º e 192º.**

O problema pede um dos ângulos. Logo, alternativa **D**.

7) Resposta "B".

Solução: Observe que podemos escrever a soma S como:

S = (10 – 1) + (100 – 1) + (1000 – 1) + (10000 – 1) + ... + (10^n – 1)

S = (10 – 1) + (10^2 – 1) + (10^3 – 1) + (10^4 – 1) + ... + (10^n – 1)

Como existem n parcelas, observe que o número (– 1) é somado n vezes, resultando em n(-1) = **- n.**

Logo, poderemos escrever:

S = (10 + 102 + 103 + 104 + ... + 10n) – n

Vamos calcular a soma S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ... + 10^n, que é uma PG de primeiro termo a_1 = 10, razão q = 10 e último termo a_n = 10^n.

Teremos:

$S_n = (a_n.q – a_1) / (q –1) = (10^n . 10 – 10) / (10 – 1) = (10^{n+1} – 10) / 9$

Substituindo em S, vem:

$S = [(10^{n+1} – 10) / 9] – n$

Deseja-se calcular o valor de 10^{n+1} - 9(S + n)

Temos que $S + n = [(10^{n+1} – 10) / 9] – n + n = (10^{n+1} – 10) / 9$

Substituindo o valor de S + n encontrado acima, fica:

$10^{n+1} – 9(S + n) = 10^{n+1} – 9(10^{n+1} – 10) / 9 = 10^{n+1} – (10^{n+1} – 10) =$ **10.**

8) Resposta "819".

Solução: Sendo q a razão da PG, poderemos escrever a sua forma genérica: (x/q, x, xq).

Como o produto dos 3 termos vale 729, vem:

x/q . x . xq = 729 de onde concluímos que: $x^3 = 729 = 3^6 = 3^3 . 3^3 = 9^3$, logo, x = 9.

Portanto a PG é do tipo: 9/q, 9, 9q

É dado que a soma dos 3 termos vale 39, logo:

9/q + 9 + 9q = 39 de onde vem: 9/q + 9q – 30 = 0

Multiplicando ambos os membros por q, fica: $9 + 9q^2 – 30q = 0$

Dividindo por 3 e ordenando, fica: $3q^2 – 10q + 3 = 0$, que é uma equação do segundo grau.

Resolvendo a equação do segundo grau acima encontraremos q = 3 ou q = 1/3.

Como é dito que a PG é decrescente, devemos considerar apenas o valor

q = 1/3, já que para q = 3, a PG seria crescente.

Portanto, a PG é: 9/q, 9, 9q, ou substituindo o valor de q vem: 27, 9, 3.

O problema pede a soma dos quadrados, logo:

$a^2 + b^2 + c^2 = 27^2 + 9^2 + 3^2 = 729 + 81 + 9 =$ **819.**

9) Resposta "B".

Solução: Observe que a expressão dada pode ser escrita como:

$x^{1/2} . x^{1/4} . x^{1/8} . x^{1/16} . ... = x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...}$

O expoente é a soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo a_1 = 1 /2 e razão q = 1 /2.

Logo, a soma valerá:

$S = a_1 / (1 – q) = (1 /2) / 1 – (1 /2) = 1$

Então, $x^{1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ...} = x^1 =$ **x**

10) Resposta "6171".

Solução: Dados:

M(5) = 1000, 1005, ..., 9995, 10000.

M(7) = 1001, 1008, ..., 9996.

M(35) = 1015, 1050, ... , 9975.

M(1) = 1, 2, ..., 10000.

Para múltiplos de 5, temos: a_n = a1+ (n-1).r → 10000 = 1000 + (n - 1). 5 → n = 9005/5 → n = 1801.

Para múltiplos de 7, temos: a_n = a1+ (n-1).r → 9996 = 1001 + (n - 1). 7 → n = 9002/7 → n = 1286.

Para múltiplos de 35, temos: a_n = a1 + (n - 1).r → 9975 = 1015 + (n - 1).35 → n = 8995/35 → n = 257.

Para múltiplos de 1, temos: a_n = a1 = (n -1).r → 10000 = 1000 + (n - 1).1 → n = 9001.

Sabemos que os múltiplos de 35 são múltiplos comuns de 5 e 7, isto é, eles aparecem no conjunto dos múltiplos de 5 e no conjunto dos múltiplos de 7 (daí adicionarmos uma vez tal conjunto de múltiplos).

Total = M(1) - M(5) - M(7) + M(35).

Total = 9001 - 1801 - 1286 + 257 = 6171

1.4 CONCEITO DE NÚMERO IRRACIONAL E A REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS.

Números Reais

O conjunto dos **números reais** *R* é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fração decimal possivelmente infinita, como 3,141592(...). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma reta.

Denomina-se corpo dos números reais a coleção dos elementos pertencentes à conclusão dos racionais, formado pelo corpo de frações associado aos inteiros (números racionais) e a norma associada ao infinito.

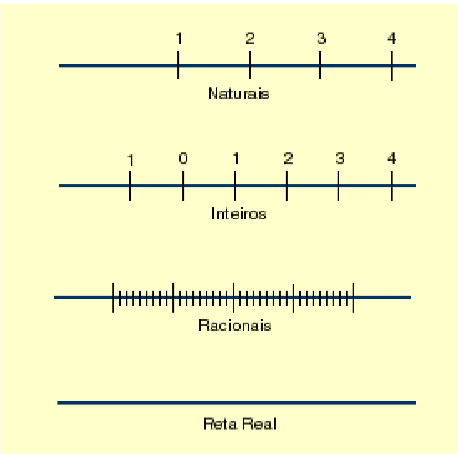
Existem também outras conclusões dos racionais, uma para cada número primo p, chamadas números p-ádicos. O corpo dos números p-ádicos é formado pelos racionais e a norma associada a p!

Propriedade

O conjunto dos números reais com as operações binárias de soma e produto e com a relação natural de ordem formam um corpo ordenado. Além das propriedades de um corpo ordenado, *R* tem a seguinte propriedade: Se *R* for dividido em dois conjuntos (uma partição) *A* e *B*, de modo que todo elemento de *A* é menor que todo elemento de *B*, então existe um elemento *x* que *separa* os dois conjuntos, ou seja, *x* é maior ou igual a todo elemento de *A* e menor ou igual a todo elemento de *B*.

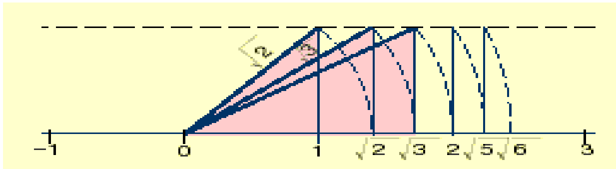
$$\forall A,B,(\mathbb{R}=A\cup B\wedge(\forall a\in A,b\in B,(a<b))$$
$$\Longrightarrow(\exists x,(\forall a\in A,b\in B\Longrightarrow a\le x\le b))$$

Ao conjunto formado pelos números Irracionais e pelos números Racionais chamamos de conjunto dos números Reais. Ao unirmos o conjunto dos números Irracionais com o conjunto dos números Racionais, formando o conjunto dos números Reais, todas as distâncias representadas por eles sobre uma reta preenchem-na por completo; isto é, ocupam todos os seus pontos. Por isso, essa reta é denominada reta Real.



Cada novo conjunto numérico ocupa mais pontos da reta. O conjunto dos números reais a preenche por completo.

Podemos concluir que na representação dos números Reais sobre uma reta, dados uma origem e uma unidade, a cada ponto da reta corresponde um número Real e a cada número Real corresponde um ponto na reta.



Ordenação dos números Reais

A representação dos números Reais permite definir uma relação de ordem entre eles. Os números Reais positivos são maiores que zero e os negativos, menores. Expressamos a relação de ordem da seguinte maneira: Dados dois números Reais **a** e **b**,

$a \le b \leftrightarrow b - a \ge 0$

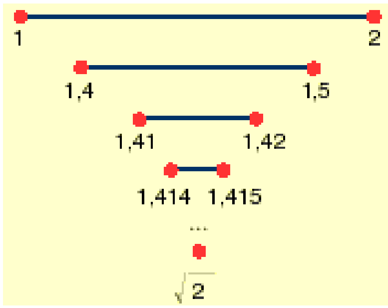
Exemplo: $-15 \le \leftrightarrow 5 - (-15) \ge 0$

$5 + 15 \ge 0$

Propriedades da relação de ordem

- Reflexiva: $a \le a$
- Transitiva: $a \le b$ e $b \le c \rightarrow a \le c$
- Anti-simétrica: $a \le b$ e $b \le a \rightarrow a = b$
- Ordem total: $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$

Expressão aproximada dos números Reais



Os números Irracionais possuem infinitos algarismos decimais não-periódicos. As operações com esta classe de números sempre produzem erros quando não se utilizam todos os algarismos decimais. Por outro lado, é impossível utilizar todos eles nos cálculos. Por isso, somos obrigados a usar aproximações, isto é, cortamos o decimal em algum lugar e desprezamos os algarismos restantes. Os algarismos escolhidos serão uma aproximação do número Real. Observe como tomamos a aproximação de e do número nas tabelas.

	Aproximação por			
	Falta		**Excesso**	
Erro menor que	$\sqrt{2}$	π	$\sqrt{2}$	π
1 unidade	**1**	**3**	**2**	**4**
1 décimo	**1,4**	**3,1**	**1,5**	**3,2**
1 centésimo	**1,41**	**3,14**	**1,42**	**3,15**
1 milésimo	**1,414**	**3,141**	**1,415**	**3,142**
1 décimo de milésimo	**1,4142**	**3,1415**	**1,4134**	**3,1416**

Operações com números Reais

Operando com as aproximações, obtemos uma sucessão de intervalos fixos que determinam um número Real. É assim que vamos trabalhar as operações adição, subtração, multiplicação e divisão. Relacionamos, em seguida, uma série de recomendações úteis para operar com números Reais:

- Vamos tomar a aproximação por falta.
- Se quisermos ter uma ideia do erro cometido, escolhemos o mesmo número de casas decimais em ambos os números.
- Se utilizamos uma calculadora, devemos usar a aproximação máxima admitida pela máquina (o maior número de casas decimais).
- Quando operamos com números Reais, devemos fazer constar o erro de aproximação ou o número de casas decimais.
- É importante adquirirmos a idéia de aproximação em função da necessidade. Por exemplo, para desenhar o projeto de uma casa, basta tomar medidas com um erro de centésimo.
- Em geral, para obter uma aproximação de **n** casas decimais, devemos trabalhar com números Reais aproximados, isto é, com **n** + 1 casas decimais.

Para colocar em prática o que foi exposto, vamos fazer as quatro operações indicadas: adição, subtração, multiplicação e divisão com dois números Irracionais.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$$

Valor Absoluto

Como vimos, o **erro** pode ser:
- Por *excesso*: neste caso, consideramos o erro positivo.
- Por *falta*: neste caso, consideramos o erro negativo.

Quando o erro é dado sem sinal, diz-se que está dado em valor absoluto. O valor absoluto de um número **a** é designado por **|a|** e coincide com o número positivo, se for positivo, e com seu oposto, se for negativo.

Exemplo: Um livro nos custou 8,50 reais. Pagamos com uma nota de 10 reais. Se nos devolve 1,60 real de troco, o vendedor cometeu um erro de +10 centavos. Ao contrário, se nos devolve 1,40 real, o erro cometido é de 10 centavos.

Figura 8	Aproximação	Por excesso	Por falta
Soma de números reais: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	3,1464	3,1462
	erro máximo	0,0002	0,0002
Subtração de números reais: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	0,3178	0,3178
	erro máximo	0,0000	0,0000
Multiplicação de números reais: $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$	2,4497	2,4493
	erro máximo	0,0004	0,0004
Divisão de números reais: $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,4143	1,4142
	$\sqrt{3}$	1,7321	1,7320
	$\sqrt{3}\div\sqrt{2}$	1,2247	1,2247
	erro máximo	0,0000	0,0000

Questões

1 - (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Um comerciante tem 8 prateleiras em seu empório para organizar os produtos de limpeza. Adquiriu 100 caixas desses produtos com 20 unidades cada uma, sendo que a quantidade total de unidades compradas será distribuída igualmente entre essas prateleiras. Desse modo, cada prateleira receberá um número de unidades, desses produtos, igual a

A) 40
B) 50
C) 100
D) 160
E) 250

2 - (CÂMARA DE CANITAR/SP – RECEPCIONISTA – INDEC/2013) Em uma banca de revistas existem um total de 870 exemplares dos mais variados temas. Metade das revistas é da editora A, dentre as demais, um terço são publicações antigas. Qual o número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas?

A) 320
B) 290
C) 435
D) 145

3 - (TRT 6ª – TÉCNICO JUDICIÁRIO- ADMINISTRATIVA – FCC/2012) Em uma praia chamava a atenção um catador de cocos (a água do coco já havia sido retirada). Ele só pegava cocos inteiros e agia da seguinte maneira: o primeiro coco ele coloca inteiro de um lado; o segundo ele dividia ao meio e colocava as metades em outro lado; o terceiro coco ele dividia em três partes iguais e colocava os terços de coco em um terceiro lugar, diferente dos outros lugares; o quarto coco ele dividia em quatro partes iguais e colocava os quartos de coco em um quarto lugar diferente dos outros lugares. No quinto coco agia como se fosse o primeiro coco e colocava inteiro de um lado, o seguinte dividia ao meio, o seguinte em três partes iguais, o seguinte em quatro partes iguais e seguia na sequência: inteiro, meios, três partes iguais, quatro partes iguais. Fez isso com exatamente 59 cocos quando alguém disse ao catador: eu quero três quintos dos seus terços de coco e metade dos seus quartos de coco. O catador consentiu e deu para a pessoa

A) 52 pedaços de coco.
B) 55 pedaços de coco.
C) 59 pedaços de coco.
D) 98 pedaços de coco.
E) 101 pedaços de coco.

4 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) A mãe do Vitor fez um bolo e repartiu em 24 pedaços, todos de mesmo tamanho. A mãe e o pai comeram juntos, ¼ do bolo. O Vitor e a sua irmã comeram, cada um deles, ¼ do bolo. Quantos pedaços de bolo sobraram?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

5 - (UEM/PR – AUXILIAR OPERACIONAL – UEM/2014) Paulo recebeu R$1.000,00 de salário. Ele gastou ¼ do salário com aluguel da casa e 3/5 do salário com outras despesas. Do salário que Paulo recebeu, quantos reais ainda restam?

A) R$ 120,00
B) R$ 150,00
C) R$ 180,00
D) R$ 210,00
E) R$ 240,00

6 - (UFABC/SP – TECNÓLOGO-TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO – VUNESP/2013) Um jardineiro preencheu parcialmente, com água, 3 baldes com capacidade de 15 litros cada um. O primeiro balde foi preenchido com 2/3 de sua capacidade, o segundo com 3/5 da capacidade, e o terceiro, com um volume correspondente à média dos volumes dos outros dois baldes. A soma dos volumes de água nos três baldes, em litros, é

A) 27.
B) 27,5.
C) 28.
D) 28,5.
E) 29.

7 - (UFOP/MG – ADMINISTRADOR DE EDIFICIOS – UFOP/2013) Uma pessoa caminha 5 minutos em ritmo normal e, em seguida, 2 minutos em ritmo acelerado e, assim, sucessivamente, sempre intercalando os ritmos da caminhada (5 minutos normais e 2 minutos acelerados). A caminhada foi iniciada em ritmo normal, e foi interrompida após 55 minutos do início.

O tempo que essa pessoa caminhou aceleradamente foi:

A) 6 minutos
B) 10 minutos
C) 15 minutos
D) 20 minutos

8 - (PREF. IMARUÍ – AGENTE EDUCADOR – PREF. IMARUÍ/2014) Sobre o conjunto dos números reais é CORRETO dizer:

A) O conjunto dos números reais reúne somente os números racionais.
B) R* é o conjunto dos números reais não negativos.
C) Sendo A = {-1,0}, os elementos do conjunto A não são números reais.
D) As dízimas não periódicas são números reais.

9 - (TJ/SP - AUXILIAR DE SAÚDE JUDICIÁRIO - AUXILIAR EM SAÚDE BUCAL – VUNESP/2013) Para numerar as páginas de um livro, uma impressora gasta 0,001 mL por cada algarismo impresso. Por exemplo, para numerar as páginas 7, 58 e 290 gasta-se, respectivamente, 0,001 mL, 0,002 mL e 0,003 mL de tinta. O total de tinta que será gasto para numerar da página 1 até a página 1 000 de um livro, em mL, será

A) 1,111.
B) 2,003.
C) 2,893.
D) 1,003.
E) 2,561.

10 - (BNDES – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – CESGRANRIO/2013) Gilberto levava no bolso três moedas de R$ 0,50, cinco de R$ 0,10 e quatro de R$ 0,25. Gilberto retirou do bolso oito dessas moedas, dando quatro para cada filho.

A diferença entre as quantias recebidas pelos dois filhos de Gilberto é de, no máximo,

A) R$ 0,45
B) R$ 0,90
C) R$ 1,10
D) R$ 1,15
E) R$ 1,35

Respostas

1 - RESPOSTA: “E”.
Total de unidades: $100 \cdot 20 = 2000$ unidades

$\frac{2000}{8} = 250$ unidades em cada prateleira.

2 - RESPOSTA: “B”.
editora A: 870/2=435 revistas
publicações antigas: 435/3=145 revistas

$435 + 145 = 580$
$870 - 580 = 290$

O número de exemplares que não são da Editora A e nem são antigas são 290.

3 - RESPOSTA: "B".

$$\frac{59}{4} = 14\ resto\ 3$$

14 vezes iguais
Coco inteiro: 14
Metades:14.2=28
Terça parte:14.3=42
Quarta parte:14.4=56
3 cocos: 1 coco inteiro, metade dos cocos, terça parte
Quantidade total
Coco inteiro: 14+1=15
Metades: 28+2=30
Terça parte:42+3=45
Quarta parte :56

$$\frac{3}{5} \cdot 45 + \frac{1}{2} \cdot 56 = 27 + 28 = 55$$

4 - RESPOSTA "B".

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Sobrou 1/4 do bolo.

$$24 \cdot \frac{1}{4} = 6\ pedaços$$

5 - RESPOSTA: "B".

Aluguel: $1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$

Outras despesas: $1000 \cdot \frac{3}{5} = 600$

$$250 + 600 = 850$$

Restam :1000-850=R$150,00

6 - RESPOSTA: "D".
Primeiro balde:

$$\frac{2}{3} \cdot 15 = 10\ litros$$

Segundo balde:

$$\frac{3}{5} \cdot 15 = 9\ litros$$

Terceiro balde:

$$\frac{10 + 9}{2} = 9{,}5\ litros$$

A soma dos volumes é : 10+9+9,5=28,5 litros

7 - RESPOSTA: "C".
A caminhada sempre vai ser 5 minutos e depois 2 minutos, então 7 minutos ao total.

Dividindo o total da caminhada pelo tempo, temos:

$$\frac{55}{7} = 7\ e\ resta\ 6$$

Assim, sabemos que a pessoa caminhou 7. (5 minutos +2 minutos) +6 minutos (5 minutos+1 minuto)
Aceleradamente caminhou: (7.2)+1➔ 14+1=15 minutos

8 - RESPOSTA: "D".
A) errada - O conjunto dos números reais tem os conjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais.
B) errada – R* são os reais sem o zero.
C) errada - -1 e 0 são números reais.

9 - RESPOSTA: "C".
1 a 9 =9 algarismos=0,001 · 9=0,009 ml
De 10 a 99, temos que saber quantos números tem.
99-10+1=90.
OBS: soma 1, pois quanto subtraímos exclui-se o primeiro número.
90 números de 2 algarismos: 0,002 · 90=0,18ml

De 100 a 999
999-100+1=900 números
900 · 0,003=2,7ml
1000=0,004ml
Somando: 0,009+0,18+2,7+0,004=2,893

10 - RESPOSTA: "E".
Supondo que as quatro primeiras moedas sejam as 3 de R$ 0,50 e 1 de R$ 0,25(maiores valores).
Um filho receberia : 1,50+0,25=R$1,75
E as ouras quatro moedas sejam de menor valor: 4 de R$ 0,10=R$ 0,40.
A maior diferença seria de 1,75-0,40=1,35
Dica: sempre que fala a maior diferença tem que o maior valor possível – o menor valor.

1.5 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DO 1º E 2º GRAUS.

Polinômios

Para polinômios podemos encontrar várias definições diferentes como:
Polinômio é uma expressão algébrica com todos os termos semelhantes reduzidos. Polinômio é um ou mais monômios separados por operações.
As duas podem ser aceitas, pois se pegarmos um polinômio encontraremos nele uma expressão algébrica e monômios separados por operações.

- 3xy é monômio, mas também considerado polinômio, assim podemos dividir os polinômios em monômios (apenas um monômio), binômio (dois monômios) e trinômio (três monômios).

- $3x + 5$ é um polinômio e uma expressão algébrica.

Como os monômios, os polinômios também possuem grau e é assim que eles são separados. Para identificar o seu grau, basta observar o grau do maior monômio, esse será o grau do polinômio.

Com os polinômios podemos efetuar todas as operações: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação.

O procedimento utilizado na adição e subtração de polinômios envolve técnicas de redução de termos semelhantes, jogo de sinal, operações envolvendo sinais iguais e sinais diferentes. Observe os exemplos a seguir:

Adição

Exemplo 1

Adicionar $x^2 – 3x – 1$ com $–3x^2 + 8x – 6$.

$(x^2 – 3x – 1) + (–3x^2 + 8x – 6)$ → eliminar o segundo parênteses através do jogo de sinal.

$+(–3x^2) = –3x^2$

$+(+8x) = +8x$

$+(–6) = –6$

$x^2 – 3x – 1 –3x^2 + 8x – 6$ → reduzir os termos semelhantes.

$x^2 – 3x^2 – 3x + 8x – 1 – 6$

$–2x^2 + 5x – 7$

Portanto: $(x^2 – 3x – 1) + (–3x^2 + 8x – 6) = –2x^2 + 5x – 7$

Exemplo 2

Adicionando $4x^2 – 10x – 5$ e $6x + 12$, teremos:

$(4x^2 – 10x – 5) + (6x + 12)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.

$4x^2 – 10x – 5 + 6x + 12$ → reduzir os termos semelhantes.

$4x^2 – 10x + 6x – 5 + 12$

$4x^2 – 4x + 7$

Portanto: $(4x^2 – 10x – 5) + (6x + 12) = 4x^2 – 4x + 7$

Subtração

Exemplo 1

Subtraindo $–3x^2 + 10x – 6$ de $5x^2 – 9x – 8$.

$(5x^2 – 9x – 8) – (–3x^2 + 10x – 6)$ → eliminar os parênteses utilizando o jogo de sinal.

$– (–3x^2) = +3x^2$

$– (+10x) = –10x$

$– (–6) = +6$

$5x^2 – 9x – 8 + 3x^2 –10x +6$ → reduzir os termos semelhantes.

$5x^2 + 3x^2 – 9x –10x – 8 + 6$

$8x^2 – 19x – 2$

Portanto: $(5x^2 – 9x – 8) – (–3x^2 + 10x – 6) = 8x^2 – 19x – 2$

Exemplo 2

Se subtrairmos $2x^3 – 5x^2 – x + 21$ e $2x^3 + x^2 – 2x + 5$ teremos:

$(2x^3 – 5x^2 – x + 21) – (2x^3 + x^2 – 2x + 5)$ → eliminando os parênteses através do jogo de sinais.

$2x^3 – 5x^2 – x + 21 – 2x^3 – x^2 + 2x – 5$ → redução de termos semelhantes.

$2x^3 – 2x^3 – 5x^2 – x^2 – x + 2x + 21 – 5$

$0x^3 – 6x^2 + x + 16$

$– 6x^2 + x + 16$

Portanto: $(2x^3 – 5x^2 – x + 21) – (2x^3 + x^2 – 2x + 5) = – 6x^2 + x + 16$

Exemplo 3

Considerando os polinômios $A = 6x^3 + 5x^2 – 8x + 15$, $B = 2x^3 – 6x^2 – 9x + 10$ e $C = x^3 + 7x^2 + 9x + 20$. Calcule:

a) $A + B + C$

$(6x^3 + 5x^2 – 8x + 15) + (2x^3 – 6x^2 – 9x + 10) + (x^3 + 7x^2 + 9x + 20)$

$6x^3 + 5x^2 – 8x + 15 + 2x^3 – 6x^2 – 9x + 10 + x^3 + 7x^2 + 9x + 20$

$6x^3 + 2x^3 + x^3 + 5x^2 – 6x^2 + 7x^2 – 8x – 9x + 9x + 15 + 10 + 20$

$9x^3 + 6x^2 – 8x + 45$

$A + B + C = 9x^3 + 6x^2 – 8x + 45$

b) $A – B – C$

$(6x^3 + 5x^2 – 8x + 15) – (2x^3 – 6x^2 – 9x + 10) – (x^3 + 7x^2 + 9x + 20)$

$6x^3 + 5x^2 – 8x + 15 – 2x^3 + 6x^2 + 9x – 10 – x^3 – 7x^2 – 9x – 20$

$6x^3 – 2x^3 – x^3 + 5x^2 + 6x^2 – 7x^2 – 8x + 9x – 9x + 15 – 10 – 20$

$6x^3 – 3x^3 + 11x^2 – 7x^2 – 17x + 9x + 15 – 30$

$3x^3 + 4x^2 – 8x – 15$

$A – B – C = 3x^3 + 4x^2 – 8x – 15$

A multiplicação com polinômio (com dois ou mais monômios) pode ser realizada de três formas:

Multiplicação de monômio com polinômio.

Multiplicação de número natural com polinômio.

Multiplicação de polinômio com polinômio.

As multiplicações serão efetuadas utilizando as seguintes propriedades:

- Propriedade da base igual e expoente diferente: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Monômio multiplicado por monômio é o mesmo que multiplicar parte literal com parte literal e coeficiente com coeficiente.

Multiplicação de monômio com polinômio

- Se multiplicarmos $3x$ por $(5x^2 + 3x – 1)$, teremos:

$3x \cdot (5x^2 + 3x – 1)$ → aplicar a propriedade distributiva.

$3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot 3x + 3x \cdot (-1)$

$15x^3 + 9x^2 – 3x$

Portanto: $3x (5x^2 + 3x – 1) = 15x^3 + 9x^2 – 3x$

- Se multiplicarmos $-2x^2$ por $(5x – 1)$, teremos:

$-2x^2 (5x – 1)$ → aplicando a propriedade distributiva.

$-2x^2 \cdot 5x – 2x^2 \cdot (-1)$

$- 10x^3 + 2x^2$

Portanto: $-2x^2 (5x – 1) = - 10x^3 + 2x^2$

Multiplicação de número natural

- Se multiplicarmos 3 por $(2x^2 + x + 5)$, teremos:
$3\ (2x^2 + x + 5) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$3\ .\ 2x^2 + 3\ .\ x + 3\ .\ 5$
$6x^2 + 3x + 15$.

Portanto: $3\ (2x^2 + x + 5) = 6x^2 + 3x + 15$.

Multiplicação de polinômio com polinômio

- Se multiplicarmos $(3x – 1)$ por $(5x^2 + 2)$
$(3x – 1)\ .\ (5x^2 + 2) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$3x\ .\ 5x^2 + 3x\ .\ 2 – 1\ .\ 5x^2 – 1\ .\ 2$
$15x^3 + 6x – 5x^2 – 2$

Portanto: $(3x – 1)\ .\ (5x^2 + 2) = 15x^3 + 6x – 5x^2 – 2$
- Multiplicando $(2x^2 + x + 1)$ por $(5x – 2)$, teremos:
$(2x^2 + x + 1)\ (5x – 2) \rightarrow$ aplicar a propriedade distributiva.
$2x^2\ .\ (5x) + 2x^2\ .\ (-2) + x\ .\ 5x + x\ .\ (-2) + 1\ .\ 5x + 1\ .\ (-2)$
$10x^3 – 4x^2 + 5x^2 – 2x + 5x – 2$
$10x^3 + x^2 + 3x – 2$

Portanto: $(2x^2 + x + 1)\ (5x – 2) = 10x^3 + x^2 + 3x – 2$

Divisão

A compreensão de como funciona a divisão de polinômio por monômio irá depender de algumas definições e conhecimentos. Será preciso saber o que é um monômio, um polinômio e como resolver a divisão de monômio por monômio. Dessa forma, veja a seguir uma breve explicação sobre esses assuntos.

• Polinômio é uma expressão algébrica racional e inteira, por exemplo:
x^2y
$3x – 2y$
$x + y^5 + ab$
• Monômio é um tipo de polinômio que possui apenas um termo, ou seja, que possui apenas coeficiente e parte literal. Por exemplo:
$a^2 \rightarrow 1$ é o coeficiente e a^2 parte literal.
$3x^2y \rightarrow 3$ é o coeficiente e x^2y parte literal.
$-5xy^6 \rightarrow -5$ é o coeficiente e xy^6 parte literal.
• Divisão de monômio por monômio

Ao resolvermos uma divisão onde o dividendo e o divisor são monômios devemos seguir a regra: dividimos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Exemplos: $6x^3 : 3x = \underline{6}\ .\ \underline{x^3} = 2x^2$ $3x^2$

$$-10x^2y^4 : 2xy^2 = \frac{-10}{2}\ \frac{x^2}{x}\ \frac{y^4}{y^2} = -5xy^2$$

Observação: ao dividirmos as partes literais temos que estar atentos à propriedade que diz que base igual na divisão, repete a base e subtrai os expoentes.

Depois de relembrar essas definições veja alguns exemplos de como resolver **divisões de polinômio por monômio**.

Exemplo: $(10a^3b^3 + 8ab^2) : (2ab^2)$

O dividendo $10a^3b^3 + 8ab^2$ é formado por dois monômios. Dessa forma, o divisor $2ab^2$, que é um monômio, irá dividir cada um deles, veja:

$(10a^3b^3 + 8ab^2) : (2ab^2)$

$$\frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2}$$

Assim, transformamos a divisão de polinômio por monômio em duas divisões de monômio por monômio. Portanto, para concluir essa divisão é preciso dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$\frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2}$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$5a^2b \quad + \quad 4$$

$(10a^3b^3 + 8ab^2) : (2ab^2)$

$$\underbrace{(10a^3b^3) : (2ab^2)}_{5a^2b} + \underbrace{(8ab^2) : (2ab^2)}_{4}$$

Portanto, $(10a^3b^3 + 8ab^2) : (2ab^2) = 5a^2b + 4$

Exemplo: $(9x^2y^3 – 6x^3y^2 – xy) : (3x^2y)$

O dividendo $9x^2y^3 – 6x^3y^2 – xy$ é formado por três monômios. Dessa forma, o divisor $3x^2y$, que é um monômio irá dividir cada um deles, veja:

$$\frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{x\,y}{3x^2y}$$

Assim, transformamos a divisão de polinômio por monômio em três divisões de monômio por monômio. Portanto, para concluir essa divisão é preciso dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$\frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{x\,y}{3x^2y}$$

$$3y^2 – 2xy – \frac{1}{3x}$$

Portanto,

$$(9x^2y^3 – 6x^3y^2 – xy) : (3x^2y) = 3y^2 – 2xy – \frac{1}{3x} \quad \text{ou} \quad 3y^2 – 2xy – \frac{1x^{-1}}{3}$$

Exercícios

1. Um Caderno custa *y* reais. Gláucia comprou 4 cadernos, Cristina comprou 6, e Karina comprou 3. Qual é o monômio que expressa a quantia que as três gastaram juntas?

2. Suponha que a medida do lado de um quadrado seja expressa por $6x^2$, em que x representa um número real positivo. Qual o monômio que vai expressar a área desse quadrado?

3. Um caderno de 200 folhas custa x reais, e um caderno de 100 folhas custa y reais. Se Noêmia comprar 7 cadernos de 200 folhas e 3 cadernos de 100 folhas, qual é a expressão algébrica que irá expressar a quantia que ela irá gastar?

4. Escreve de forma reduzida o polinômio: $0,3x - 5xy + 1,8y + 2x - y + 3,4xy$.

5. Calcule de dois modos $(7x - 2xy - 5y) + (-2x + 4xy + y)$

6. Determine $P_1 + P_2 - P_3$, dados os Polinômios:

$P_1 = 3x^2 + x^2y^2 - 7y^2$
$P_2 = 2x^2 + 8x^2y^2 + 3y^2$
$P_3 = 5x^2 + 7x^2y^2 - 9y^2$

7. Qual é o polinômio *P* que, adicionado ao polinômio $2y^5 - 3y^4 + y^2 - 5y + 3$, dá como resultado o polinômio $3y^5 - 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 4y + 1$?

8. Qual é a forma mais simples de se escrever o polinômio expresso por: $2x(3a - 2x) + a(2x - a) - 3x(a + x)$?

9. Qual a maneira para se calcular a multiplicação do seguinte polinômio: $(2x + y)(3x - 2y)$?

10. Calcule: $(12a^5b^2 - 20a^4b^3 + 48a^3b^4)\ \ (4ab)$.

Respostas

1) Resposta "13y reais".
Solução: $4y + 6y + 3y =$
$= (4 + 6 + 3)y =$
$= 13y$
Logo, as três juntas gastaram 13y reais.

2) Resposta "$36x^4$".
Solução:
Área: $(6x^2)^2 = (6)^2 . (x)^2 = 36x^4$
Logo, a área é expressa por $36x^4$.

3) Resposta "7x + 3y".
Solução:
7 cadernos a x reais cada um: 7x reais
3 cadernos a y reais cada um: 3y reais.
Portanto, a quantia que Noêmia gastará na compra dos cadernos é expressa por:
$7x + 3y \rightarrow$ uma expressão algébrica que indica a adição de monômios.

4) Resposta "2,3x – 1,65xy + 0,8y".
Solução:
$0,3x - 5xy + 1,8y + 2x - y + 3,4xy =$
$= 0,3x + 2x - 5xy + 3,4xy + 1,8y - y = \rightarrow$ propriedade comutativa
$= 2,3x - 1,65xy + 0,8y \rightarrow$ reduzindo os termos semelhantes

Então: $2,3x - 1,65xy + 0,8y$ é a forma reduzida do polinômio dado.

5) Resposta "5x + 2xy – 4y".
Solução: 1° Modo:
$(7x - 2xy - 5y) + (-2x + 4xy + y) =$
$= 7x - 2xy - 5y - 2x + 4xy + y =$
$= 7x - 2x - 2xy + 4xy - 5y + y =$
$= 5x + 2xy - 4y$
2° Modo:

$$
\begin{array}{rl}
 & 7x - 2xy - 5y \\
- & 2x + 4xy + y \\
\hline
 & 5x + 2xy - 4y
\end{array}
$$

6) Resposta "$-3x^2 + 2x^2y^2 + 5y^2$".
Solução:
$(3x^2 + x^2y^2 - 7y^2) + (x^2 + 8x^2y^2 + 3y^2) - (5x^2 + 7x^2y^2 - 9y^2) =$
$= 3x^2 + x^2y^2 - 7y^2 - x^2 + 8x^2y^2 + 3y^2 - 5x^2 - 7x^2y^2 + 9y^2 =$
$= 3x^2 - x^2 - 5x^2 + x^2y^2 + 8x^2y^2 - 7x^2y^2 - 7y^2 + 3y^2 + 9y^2 =$
$= -3x^2 + 2x^2y^2 + 5y^2$

Logo, $P_1 + P_2 - P_3 = -3x^2 + 2x^2y^2 + 5y^2$.

7) Resposta "$y^5 + y^4 - 2y^3 + y^2 + y - 2$".
Solução:
$P + (2y^5 - 3y^4 + y^2 - 5y + 3) = (3y^5 - 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 4y + 1)$. Daí:
$P = (3y^5 - 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 4y + 1) - (2y^5 - 3y^4 + y^2 - 5y + 3) =$
$= 3y^5 - 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 4y + 1 - 2y^5 + 3y^4 - y^2 + 5y - 3 =$
$= 3y^5 - 2y^5 - 2y^4 + 3y^4 - 2y^3 + 2y^2 - y^2 - 4y + 5y + 1 - 3 =$
$= y^5 + y^4 - 2y^3 + y^2 + y - 2$.

Logo, o polinômio P procurado é $y^5 + y^4 - 2y^3 + y^2 + y - 2$.

8)Resposta "$5ax - 7x^2 - a^2$".
Solução:
$2x(3a - 2x) + a(2x - a) - 3x(a + x) =$
$= 6ax - 4x^2 + 2ax - a^2 - 3ax - 3x^2 =$
$= 6ax + 2ax - 3ax - 4x^2 - 3x^2 - a^2 =$
$= 5ax - 7x^2 - a^2$

9) Resposta "$6x^2 - xy - 2y^2$".
Solução: Nesse caso podemos resolve de duas maneiras:
1° Maneira: $(2x + y)(3x - 2y) =$
$= 2x . 3x - 2x . 2y + y . 3x - y . 2y =$
$= 6x^2 - 4xy + 3xy - 2y^2 =$
$= 6x^2 - xy - 2y^2$

2° Maneira:

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x - 2y \\
x & 2x + y \\
\hline
 & 6x^2 - 4xy \\
 & \quad + 3xy - 2y^2 \\
\hline
 & 6x^2 - xy - 2y^2
\end{array}
$$

10) Resposta "$3a^4b – 5a^3b^2 + 12a^2b^3$".
Solução:
$(12a^5b^2 – 20a^4b^3 + 48a^3b^4) \div (4ab) =$
$= (12a^5b^2 \div 4ab) – (20a^4b^3 \div 4ab) + (48a^3b^4 \div 4ab) =$
$= 3a^4b – 5a^3b^2 + 12a^2b^3$

Cálculos Algébricos

Expressões Algébricas são aquelas que contêm números e letras.
Ex: $2ax^2+bx$

Variáveis são as letras das expressões algébricas que representam um número real e que de princípio não possuem um valor definido.
Valor numérico de uma expressão algébrica é o número que obtemos substituindo as variáveis por números e efetuamos suas operações.

Ex: Sendo x =1 e y = 2, calcule o valor numérico (VN) da expressão:
$x^2 + y$ » $1^2 + 2 = 3$ Portando o valor numérico da expressão é 3.

Monômio: os números e letras estão ligados apenas por produtos.
Ex : 4x

Polinômio: é a soma ou subtração de monômios.
Ex: 4x+2y

Termos semelhantes: são aqueles que possuem partes literais iguais (variáveis)
Ex: $2x^3y^2z$ e $3x^3y^2z$ » são termos semelhantes pois possuem a mesma parte literal.

Adição e Subtração de expressões algébricas
Para determinarmos a soma ou subtração de expressões algébricas, basta somar ou subtrair os termos semelhantes.
Assim: $2x^3y^2z + 3x^3y^2z = 5x^3y^2z$ ou $2x^3y^2z - 3x^3y^2z = -x^3y^2z$

Convém lembrar dos jogos de sinais.
Na expressão $(x^3 + 2y^2 + 1) – (y^2 - 2) = x^3 + 2y^2 + 1 – y^2 + 2 = x^3 + y^2 + 3$

Multiplicação e Divisão de expressões algébricas
Na multiplicação e divisão de expressões algébricas, devemos usar a propriedade distributiva.
Exemplos:
1) $a(x+y) = ax + ay$
2) $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$
3) $x(x^2 + y) = x^3 + xy$

Para multiplicarmos potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.
Na divisão de potências devemos conservar a base e subtrair os expoentes
Exemplos:
1) $4x^2 : 2x = 2x$
2) $(6x^3 - 8x) : 2x = 3x^2 - 4$
3) $(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x+2) : (x^2 - 2x + 1) = x^2 - 3x + 2$

Resolução:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-x^4 + 2x^3 - x^2} \qquad\qquad & x^2 - 3x + 2 \\
-3x^3 + 8x^2 - 7x \qquad & \\
\underline{3x^3 - 6x^2 - 3x} \qquad & \\
2x^2 - 4x + 2 & \\
\underline{-2x^2 + 4x - 2} & \\
0 &
\end{array}
$$

Para iniciarmos as operações devemos saber o que são termos semelhantes.
Dizemos que um termo é semelhante do outro quando suas partes literais são idênticas.

Veja:
$5x^2$ e $42x$ são dois termos, as suas partes literais são x^2 e x, as letras são iguais, mas o expoente não, então esses termos não são semelhantes.
$7ab^2$ e $20ab^2$ são dois termos, suas partes literais são ab^2 e ab^2, observamos que elas são idênticas, então podemos dizer que são semelhantes.

Adição e subtração de monômios

Só podemos efetuar a adição e subtração de monômios entre termos semelhantes. E quando os termos envolvidos na operação de adição ou subtração não forem semelhantes, deixamos apenas a operação indicada.
Veja:
Dado os termos $5xy^2$, $20xy^2$, como os dois termos são semelhantes eu posso efetuar a adição e a subtração deles.
$5xy^2 + 20xy^2$ devemos somar apenas os coeficientes e conservar a parte literal.
$25xy^2$
$5xy^2 - 20xy^2$ devemos subtrair apenas os coeficientes e conservar a parte literal.
- 15 xy2

Veja alguns exemplos:
$- \underline{x}^2 - \underline{2x}^2 + x^2$ como os coeficientes são frações devemos tirar o mmc de 6 e 9.

$$\frac{3x^2 - 4x^2 + 18x^2}{18}$$

$$\frac{17x^2}{18}$$

$- 4x^2 + 12y^3 – 7y^3 – 5x^2$ devemos primeiro unir os termos semelhantes. $12y^3 – 7y^3 + 4x^2 – 5x^2$ agora efetuamos a soma e a subtração.
$-5y^3 – x^2$ como os dois termos restantes não são semelhantes, devemos deixar apenas indicado à operação dos monômios.

Reduza os termos semelhantes na expressão $4x^2 - 5x - 3x + 2x^2$. Depois calcule o seu valor numérico da expressão. $4x^2 - 5x - 3x + 2x^2$ reduzindo os termos semelhantes. $4x^2 + 2x^2 - 5x - 3x$

$6x^2 - 8x$ os termos estão reduzidos, agora vamos achar o valor numérico dessa expressão.

Para calcularmos o valor numérico de uma expressão devemos ter o valor de sua incógnita, que no caso do exercício é a letra x.

Vamos supor que x = - 2, então substituindo no lugar do x o -2 termos:

$6x^2 - 8x$
$6 . (-2)^2 - 8 . (-2) =$
$6 . 4 + 16 =$
$24 + 16$
40

Multiplicação de monômios

Para multiplicarmos monômios não é necessário que eles sejam semelhantes, basta multiplicarmos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Sendo que quando multiplicamos as partes literais devemos usar a propriedade da potência que diz: $a^m . a^n = a^{m+n}$ (bases iguais na multiplicação repetimos a base e somamos os expoentes).

$(3a^2b) . (- 5ab^3)$ na multiplicação dos dois monômios, devemos multiplicar os coeficientes 3 . (-5) e na parte literal multiplicamos as que têm mesma base para que possamos usar a propriedade $a^m . a^n = a^{m+n}$.

$3 . (- 5) . a^2 . a . b . b^3$
$-15\ a^{2+1}\ b^{1+3}$
$-15\ a^3b^4$

Divisão de monômios

Para dividirmos os monômios não é necessário que eles sejam semelhantes, basta dividirmos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. Sendo que quando dividirmos as partes literais devemos usar a propriedade da potência que diz: $a^m : a^n = a^{m-n}$ (bases iguais na divisão repetimos a base e diminuímos os expoentes), sendo que $a \neq 0$.

$(-20x^2y^3) : (- 4xy^3)$ na divisão dos dois monômios, devemos dividir os coeficientes -20 e - 4 e na parte literal dividirmos as que têm mesma base para que possamos usar a propriedade am : $a^n = a^{m-n}$.

$-20 : (- 4) . x^2 : x . y^3 : y^3$
$5\ x^{2-1}\ y^{3-3}$
$5x^1y^0$
$5x$

Potenciação de monômios

Na potenciação de monômios devemos novamente utilizar uma propriedade da potenciação:

(I) $(a . b)^m = a^m . b^m$
(II) $(am)^n = a^{m \cdot n}$
Veja alguns exemplos:
$(-5x^2b^6)^2$ aplicando a propriedade

(I). $(-5)^2 . (x^2)^2 . (b^6)^2$ aplicando a propriedade
(II) $25 . x^4 . b^{12}\ 25x^4b^{12}$

Exercícios

1. Determine o 7º termo do binômio (2x + 1)9, desenvolvido segundo as potências decrescentes de x.

2. Qual o termo médio do desenvolvimento de (2x + 3y)8?

3. Desenvolvendo o binômio (2x - 3y)3n, obtemos um polinômio de 16 termos. Qual o valor de n?

4. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de (x + 1/x)6.

5. Calcule: $(3x^2+2x-1) + (-2x^2+4x+2)$.

6. Efetue e simplifique o seguinte calculo algébrico: (2x+3).(4x+1).

7. Efetue e simplifique os seguintes cálculos algébricos:
a) $(x - y).(x^2 - xy + y^2)$
b) (3x - y).(3x + y).(2x - y)

8. Dada a expressão algébrica bc – b2, determine o seu valor numérico quando b = 2,2 e c = 1,8.

9. Calcule o valor numérico da expressão 2x3 – 10y, quando x = -3 e y = -4.

10. Um caderno curta y reais. Gláucia comprou 4 cadernos, Cristina comprou 6 cadernos, e Karina comprou 3. Qual é o monômio que expressa a quantia que as três gastaram juntas?

Respostas

1) Resposta “672x3”.

Solução: Primeiro temos que aplicar a fórmula do termo geral de (a + b)n, onde:
a = 2x
b = 1
n = 9

Como queremos o sétimo termo, fazemos p = 6 na fórmula do termo geral e efetuamos os cálculos indicados.

Temos então:

$$T_{6+1} = T_7 = C_{9,6} . (2x)^{9-6} \times (1)^6 = \frac{9!}{[(9-6)!\ x6!]} \times (2x)^3 \times 1 =$$
$$= \frac{9.8.7.6!}{3.2.1.6!} \times 8x^3 = 672x^3$$

Portanto o sétimo termo procurado é 672x3.

2) Resposta “90720x4y4”.

Solução: Temos:
a = 2x
b = 3y
n = 8

Sabemos que o desenvolvimento do binômio terá 9 termos, porque n = 8. Ora sendo T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9 os termos do desenvolvimento do binômio, o termo do meio (termo médio) será o T_5 (quinto termo).

Logo, o nosso problema resume-se ao cálculo do T5. Para isto, basta fazer p = 4 na fórmula do termo geral e efetuar os cálculos decorrentes. Teremos:

$$T_{4+1} = T_5 = C_{8,4} \,.\, (2x)^{8-4} \,.\, (3y)^4 = \frac{8!}{[(8-4)!\,.4!]} \,.\, (2x)^4 \,.\, (3y)^4 =$$

$$= \frac{8.7.6.5.4!}{(4!.4.3.2.1} \,.\, 16x^4 \,.\, 81y^4$$

Fazendo as contas vem:

$T_5 = 70.16.81.x^4 \,.\, y^4 = 90720x^4y^4$, que é o termo médio procurado.

3) Resposta “5”.

Solução: Ora, se o desenvolvimento do binômio possui 16 termos, então o expoente do binômio é igual a 15.

Logo,

3n = 15 de onde se conclui que n = 5.

4) Resposta “20”.

Solução: Sabemos que o termo independente de x é aquele que não depende de x, ou seja, aquele que não possui x.

Temos no problema dado:

a = x

$b = \frac{1}{x}$

n = 6.

Pela fórmula do termo geral, podemos escrever:

$$T_{p+1} = C_{6,p} \,.\, x^{6-p} \,.\, \left(\frac{1}{x}\right)_p = C_{6,p} \,.\, x^{6-p} \,.\, x^{-p} = C_{6,p} \,.\, x^{6-2p}.$$

Ora, para que o termo seja independente de x, o expoente desta variável deve ser zero, pois $x^0 = 1$.

Logo, fazendo 6 - 2p = 0, obtemos p = 3. Substituindo então p por 6, teremos o termo procurado. Temos então:

$$T_{3+1} = T_4 = C_{6,3} \,.\, x^0 = C_{6,3} = \frac{6!}{[(6-3)!.3!]} = \frac{6.5.4.3!}{3!.2.1} = 20$$

Logo, o termo independente de x é o T_4 (quarto termo) que é igual a 20.

5) Solução:

$(3x^2+2x-1) + (-2x^2+4x+2)$

$3x^2 + 2x – 1 – 2x^2 + 4x + 2 =$

$x^2 + 6x + 1$

6) Solução:

$(2x+3).(4x+1)$

$8x^2 + 2x + 12x + 3 =$

$8x^2 + 14x + 3$

7) a - Solução:

$(x - y).(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - x^2y + xy^2 - x^2y + xy^2 - y^3 =$

$x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3 =$

b - Solução:

$(3x - y).(3x + y).(2x - y)$

$(3x - y).(6x^2 - 3xy + 2xy - y^2) =$

$(3x - y).(6x^2 - xy - y^2) =$

$18x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 6x^2y + xy^2 + y^3 =$

$18x^3 - 9x^2y - 2xy^2 + y^3$

8) Resposta “-0,88”.

Solução:

bc – b2 =

2,2 . 1,8 – 2,22 = (Substituímos as letras pelos valores passados no enunciado)

3,96 – 4,84 =

-0,88.

Portanto, o valor procurado é 0,88.

9) Resposta “-14”.

Solução:

2x3 – 10y =

$2.(-3)^2$ - 10.(-4) = (Substituímos as letras pelos valores do enunciado da questão)

2.(27) – 10.(-4) =

(-54) – (-40) =

-54 + 40 = -14.

Portanto -14 é o valor procurado na questão.

10) Resposta “13y reais”.

Solução: Como Gláucia gastou 4y reais, Cristina 6y reais e Karina 3y reais, podemos expressar essas quantias juntas por:

4y + 6y + 3y =

(4 + 6 + 3)y =

13y

Importante: Numa expressão algébrica, se todos os monômios ou termos são semelhantes, podemos tornar mais simples a expressão somando algebricamente os coeficientes numéricos e mantendo a parte literal.

Equação do 1º Grau

Veja estas equações, nas quais há apenas uma incógnita:

3x – 2 = 16 (equação de 1º grau)

$2y^3 – 5y = 11$ (equação de 3º grau)

$1 – 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$ (equação de 1º grau)

O método que usamos para resolver a equação de 1º grau é isolando a incógnita, isto é, deixar a incógnita sozinha em um dos lados da igualdade. Para conseguir isso, há dois recursos:

- inverter operações;
- efetuar a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Exemplo1

Resolução da equação 3x – 2 = 16, invertendo operações.

Procedimento e justificativa: Se 3x – 2 dá 16, conclui-se que 3x dá 16 + 2, isto é, 18 (invertemos a subtração). Se 3x é igual a 18, é claro que x é igual a 18 : 3, ou seja, 6 (invertemos a multiplicação por 3).

Registro

$3x - 2 = 16$
$3x = 16 + 2$
$3x = 18$
$x = \frac{18}{3}$
$x = 6$

Exemplo 2

Resolução da equação $1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$, efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Procedimento e justificativa: Multiplicamos os dois lados da equação por mmc (2;5) = 10. Dessa forma, são eliminados os denominadores. Fazemos as simplificações e os cálculos necessários e isolamos x, sempre efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade. No registro, as operações feitas nos dois lados da igualdade são indicadas com as setas curvas verticais.

Registro
$1 - 3x + 2/5 = x + 1/2$
$10 - 30x + 4 = 10x + 5$
$-30x - 10x = 5 - 10 - 4$
$-40x = +9(-1)$
$40x = 9$
$x = 9/40$
$x = 0,225$

Há também um processo prático, bastante usado, que se baseia nessas ideias e na percepção de um padrão visual.
- Se a + b = c, conclui-se que a = c + b.

Na primeira igualdade, a parcela *b* aparece somando no lado esquerdo; na segunda, a parcela *b* aparece subtraindo no lado direito da igualdade.
- Se a . b = c, conclui-se que a = c + b, desde que b ≠ 0.

Na primeira igualdade, o número *b* aparece multiplicando no lado esquerdo; na segunda, ele aparece dividindo no lado direito da igualdade.

O processo prático pode ser formulado assim:
- Para isolar a incógnita, coloque todos os termos com incógnita de um lado da igualdade e os demais termos do outro lado.
- Sempre que mudar um termo de lado, inverta a operação.

Exemplo
Resolução da equação $\frac{5(x+2)}{2} = \frac{(x+2).(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$, usando o processo prático.

Procedimento e justificativa: Iniciamos da forma habitual, multiplicando os dois lados pelo mmc (2;3) = 6. A seguir, passamos a efetuar os cálculos indicados. Neste ponto, passamos a usar o processo prático, colocando termos com a incógnita à esquerda e números à direita, invertendo operações.

Registro

$\frac{5(x+2)}{2} - \frac{(x+2).(x-3)}{3} = \frac{x^2}{3}$

$6.\frac{5(x+2)}{2} - 6.\frac{(x+2).(x-3)}{3} = 6.\frac{x^2}{3}$
$15(x + 2) - 2(x + 2)(x - 3) = - 2x^2$
$15x + 30 - 2(x^2 - 3x + 2x - 6) = - 2x^2$
$15x + 30 - 2(x^2 - x - 6) = - 2x^2$
$15x + 30 - 2x^2 + 2x + 12 = - 2x^2$
$17x - 2x^2 + 42 = - 2x^2$
$17x - 2x^2 + 2x^2 = - 42$
$17x = - 42$
$x = -\frac{42}{17}$

Note que, de início, essa última equação aparentava ser de 2º grau por causa do termo $-\frac{x^2}{3}$ no seu lado direito. Entretanto, depois das simplificações, vimos que foi reduzida a uma equação de 1º grau (17x = – 42).

Exercícios

1. Resolva a seguinte equação: $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{4} = 2x - \frac{x-4}{3}$

2. Resolva: $\frac{x-3}{5} - \frac{2x+3}{2} - 5 = \frac{3x+1}{2} - \frac{4x+2}{5}$

3. Calcule:
a) $-3x - 5 = 25$

b) $2x - \frac{1}{2} = 3$

c) $3x + 24 = -5x$

4. Existem três números inteiros consecutivos com soma igual a 393. Que números são esses?

5. Determine um número real "a" para que as expressões (3a + 6)/ 8 e (2a + 10)/6 sejam iguais.

6. Determine o valor da incógnita x:
a) $2x - 8 = 10$
b) $3 - 7.(1-2x) = 5 - (x+9)$

7. Verifique se três é raiz de $5x - 3 = 2x + 6$.

8. Verifique se -2 é raiz de $x^2 - 3x = x - 6$.

9. Quando o número x na equação (k – 3).x + (2k – 5).4 + 4k = 0 vale 3, qual será o valor de K?

10. Resolva as equações a seguir:
a) $18x - 43 = 65$
b) $23x - 16 = 14 - 17x$
c) $10y - 5 (1 + y) = 3 (2y - 2) - 20$

Respostas

1) Resposta “ $x = \frac{-31}{17}$ ”

Solução:

$$\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 3}{4} = 2x - \frac{x - 4}{3}$$

$$\frac{6(x - 1) - 3(x + 3) = 24x - 4(x - 4)}{\cancel{12}}$$

6x – 6 – 3x – 9 = 24x – 4x + 16
6x – 3x – 24x + 4x = 16 + 9 + 6
10 x – 27x = 31
(-1) - 17x = 31
$x = \frac{-31}{17}$

2) Resposta “ $x = \frac{14}{-3}$ ”

Solução:

$$\frac{x-3}{5} - \frac{(2x+3)}{2} - 5 = \frac{3x+1}{2} - \frac{4x+2}{5}$$

$$\frac{2(x-3) - 5(2x+3) - 5.10 = 5(3x+1) - 2(4x+2)}{10}$$

$$2x - 6 - 10x - 15 - 50 = 15x + 5 - 8x - 4$$

$$2x - 10x - 15x + 8x = 6 + 15 + 50 - 5 + 4$$

$$-15x = 70$$

$$x = \frac{70}{-15}$$

$$x = \frac{14}{-3}$$

3) Solução:

a) -3x – 5 = 25
-3x = 25 + 5
(-1) -3x = 30
3x = -30
$x = \frac{-30}{3} = -10$

b) $2x - \frac{1}{2} = 3$

$$\frac{2(2x) - 1 = 6}{\cancel{2}}$$

4x – 1 = 6
4x = 6 + 1
4x = 7

$x = \frac{7}{4}$

c) 3x + 24 = -5x
3x + 5x = -24
8x = -24

$x = \frac{-24}{8} = -3$

4) Resposta “130; 131 e 132”.
Solução:
x + (x + 1) + (x + 2) = 393
3x + 3 = 393
3x = 390
x = 130
Então, os números procurados são: 130, 131 e 132.

5) Resposta “22”.
Solução:
(3a + 6) / 8 = (2a + 10) / 6
6 (3a + 6) = 8 (2a + 10)
18a + 36 = 16a + 80
2a = 44
a = 44/2 = 22

6) Solução:
a) 2x – 8 = 10
2x = 10 + 8
2x = 18
x = 9 → V = {9}
b) 3 – 7.(1-2x) = 5 – (x+9)
3 –7 + 14x = 5 – x – 9
14x + x = 5 – 9 – 3 + 7
15x= 0
x = 0 → V= {0}

7) Resposta “Verdadeira”.
Solução:
5x – 3 = 2x + 6
5.3 – 3 = 2.3 + 6
15 – 3 = 6 + 6
12 = 12 → verdadeira
Então 3 é raiz de 5x – 3 = 2x + 6

8) Resposta “Errada”.
Solução:
$x^2 - 3x = x - 6$
$(-2)^2 - 3.(-2) = -2 - 6$
4 + 6 = - 2 – 6
10 = -8
Então, -2 não é raiz de $x^2 - 3x = x - 6$

9) Resposta “ $k = \frac{29}{15}$ ”
Solução:
(k – 3).3 + (2k – 5).4 + 4k = 0
3k – 9 + 8k – 20 + 4k = 0
3k + 8k + 4k = 9 + 20
15k = 29
$k = \frac{29}{15}$

10) Resposta
a) 18x = 65 + 43
18x = 108
x = 108/18
x = 6

b) 23x = 14 - 17x + 16
23x + 17x = 30
40x = 30
x = 30/40 = ¾

c) 10y - 5 - 5y = 6y - 6 -20
5y - 6y = -26 + 5
-y = -21
y = 21

Equação do 2º Grau

Denomina-se equação do 2º grau na incógnita *x* toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que *a, b, c* são números reais e $a \neq 0$.

Nas equações de 2º grau com uma incógnita, os números reais expressos por *a, b, c* são chamados **coeficientes** da equação:

- ***a*** é sempre o coeficiente do termo em $\boldsymbol{x^2}$.
- ***b*** é sempre o coeficiente do termo em ***x***.
- ***c*** é sempre o coeficiente ou termo **independente**.

Equação completa e incompleta:

- Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Exemplos

$5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa (a = 5, b = – 8, c = 3).

$y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa (a = 1, b = 12, c = 20).

- Quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta**.

Exemplos

$x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta (a = 1, b = 0 e c = – 81).

$10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta (a = 10, b = 2 e c = 0).

$5y^2 = 0$ é uma equação incompleta (a = 5, b = 0 e c = 0).

Todas essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada forma normal ou forma reduzida de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$; por meio de transformações convenientes, em que aplicamos o princípio aditivo e o multiplicativo, podemos reduzi-las a essa forma.

Exemplo: Pelo princípio aditivo.

$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$
$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0$
$2x^2 + x^2 - 7x + 4 - 1 = 0$
$3x^2 - 7x + 3 = 0$

Exemplo: Pelo princípio multiplicativo.

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x-4}$$

$$\frac{4.(x-4) - x(x-4)}{2x(x-4)} = \frac{2x^2}{2x(x-4)}$$

$4(x - 4) - x(x - 4) = 2x^2$
$4x - 16 - x^2 + 4x = 2x^2$
$-x^2 + 8x - 16 = 2x^2$
$-x^2 - 2x^2 + 8x - 16 = 0$
$-3x^2 + 8x - 16 = 0$

Resolução das equações incompletas do 2º grau com uma incógnita.

- A equação é da forma $ax^2 + bx = 0$.

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$ colocamos x em evidência

$x . (x - 9) = 0$
$x = 0$ ou $x - 9 = 0$
$x = 9$

Logo, S = {0, 9} e os números 0 e 9 são as raízes da equação.

- A equação é da forma $ax^2 + c = 0$.

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow$ Fatoramos o primeiro membro, que é uma diferença de dois quadrados.

$(x + 4) . (x - 4) = 0$
$x + 4 = 0$ $x - 4 = 0$
$x = -4$ $x = 4$

Logo, S = {–4, 4}.

Fórmula de Bhaskara

Usando o processo de Bhaskara e partindo da equação escrita na sua forma normal, foi possível chegar a uma fórmula que vai nos permitir determinar o conjunto solução de qualquer equação do 2º grau de maneira mais simples.

Essa fórmula é chamada **fórmula resolutiva** ou **fórmula de Bhaskara.**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Nesta fórmula, o fato de *x* ser ou não número real vai depender do discriminante r; temos então, três casos a estudar.

1º caso: Δ é um número real positivo (Δ > 0).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real, e existem dois valores reais diferentes para a incógnita *x*, sendo costume representar esses valores por *x’* e *x”*, que constituem as raízes da equação.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \qquad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

2º caso: Δ é zero (Δ = 0).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e ocorre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2.a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2.a} = \frac{-b}{2a}$$

Observamos, então, a existência de um único valor real para a incógnita *x*, embora seja costume dizer que a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

3º caso: Δ é um número real negativo (Δ < 0).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois não há no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo. Dizemos então, que não há valores reais para a incógnita *x*, ou seja, a equação não tem raízes reais.

A existência ou não de raízes reais e o fato de elas serem duas ou uma única dependem, exclusivamente, do discriminante $\Delta = b^2 - 4.a.c$; daí o nome que se dá a essa expressão.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$
- $\Delta = b^2 - 4.a.c$
- Quando $\Delta \geq 0$, a equação tem raízes reais.
- Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.
- $\Delta > 0$ (duas raízes diferentes).
- $\Delta = 0$ (uma única raiz).

Exemplo: Resolver a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ no conjunto R.
temos: a = 1, b = 2 e c = – 8
$\Delta = b^2 - 4.a.c = (2)^2 - 4 . (1) . (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{36}}{2.(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x'' = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Então: S = {-4, 2}.

Exercícios

1. Se $x^2 = -4x$, então:
a) x = 2 ou x = 1
b) x = 3 ou x = – 1
c) x = 0 ou x = 2
d) x = 0 ou x = – 4
e) x = 4 ou x = – 1

2. As raízes reais da equação $1,5x^2 + 0,1x = 0,6$ são:

a) $\frac{2}{5}$ e 1
b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$
c) $-\frac{3}{5}$ e $-\frac{2}{5}$
d) $-\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{5}$ e $-\frac{2}{3}$

3. As raízes da equação $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ são:
a) –2, 0 e 1
b) –1, 2 e 3
c) – 3, 0 e 1
d) – 1, 0 e 3
e) – 3, 0 e 2

4. Verifique se o número 5 é raiz da equação $x^2 + 6x = 0$.

5. Determine o valor de m na equação $x^2 + (m + 1)x - 12 = 0$ para que as raízes sejam simétricas.

6. Determine o valor de p na equação $x^2 - (2p + 5)x - 1 = 0$ para que as raízes sejam simétricas.

7. (U. Caxias do Sul-RS) Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, então o valor de *p* é:
a) 5
b) $\frac{13}{3}$
c) 7
d) –5
e) –7

8. O número de soluções reais da equação: $\frac{-6x^2 + 4x^2}{2x^2 - 3x} = -4$, com $x \neq 0$ e $x \neq \frac{3}{2}$ é:
a) 0
b) 1
c) -2
d) 3
e) 4

9. O(s) valor(es) de *B* na equação $x^2 - Bx + 4 = 0$ para que o discriminante seja igual a 65 é(são):
a) 0
b) 9
c) –9
d) –9 ou 9
e) 16

10. Um valor de *b*, para que a equação $2x^2 + bx + 2 = 0$ tenha duas raízes reais e iguais é:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

Respostas

1. Resposta "D".
Solução:
$x^2 = -4x$
$x^2 + 4x = 0$
$x (x + 4) = 0$
$x = 0 \qquad x + 4 = 0$
$x = -4$

2) Resposta "E".
Solução:
$1,5x^2 + 0,1x = 0,6$
$1,5x^2 + 0,1x - 0,6 = 0$ (x10)
$15x^2 + 1x - 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = 1^2 - 4 . 15 . -6$
$\Delta = 1 + 360$
$\Delta = 361$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2.15} = \frac{-1 \pm 19}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \text{ ou } \frac{-20}{30} = -\frac{2}{3}$$

3) Resposta "D".

Solução
x3 – 2x2 – 3x = 0
$x (x^2 - 2x - 3) = 0$
$x = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = -2^2 - 4 . 1 . - 3$
$\Delta = 4 + 12$
$\Delta = 16$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ ou } \frac{-2}{2} = -1$$

4) Resposta "Não".

Solução:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{1} = -6 \qquad P = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

Raízes: {-6,0}
Ou $x^2 + 6x = 0$
$x (x + 6) = 0$
$x=0$ ou $x+6=0$
$x=-6$

5) Resposta "-1".
Solução:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m+1)}{1} = -m - 1 \qquad P = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

$- m - 1 = 0$
$m = -1$

6) Resposta " -5/2".
Solução:
$x^2 - (2p + 5)x - 1 = 0$ (-1)
$-x^2 + (2p + 5)x + 1 = 0$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(2p+5)}{-1} = 2p + 5 \qquad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{-1} = -1$$

$2p + 5 = 0$
$2p = -5$
$p = - 5/2$

7) Resposta "C"
Solução:
$2x^2 - 3px + 40 = 0$
$28^2 - 3p8 + 40 = 0$
$2.64 - 24p + 40 = 0$
$128 - 24p + 40 = 0$
$-24p = - 168$ (-1)
$p = 168/24$
$p = 7$

8) Resposta "C".
Solução:

$$\frac{-6x^2 + 4x^3}{2x^2 - 3x} = \frac{x(-6x + 4x^2)}{x(2x - 3)} = -4$$

$-8x + 12 = -6x + 4x^2$
$4x^2 + 2x - 12 = 0$
$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = 2^2 - 4 . 4 . -12$
$\Delta = 4 + 192$
$\Delta = 196$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2.4} = \frac{-2 \pm 14}{8} \; \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ ou } \frac{-16}{8} = -2$$

9) Resposta "D".
Solução:
$x^2 - Bx + 4 = 0$
$b^2 - 4.a.c$
$b^2 - 4 . 1 . 4$
$b^2 - 16 = 65$
$b^2 = 65 + 16$
$b = \sqrt{81}$
$b = 9$
$b = -B$
$B = \pm 9$

10) Resposta "C".
Solução:
$2x^2 + Bx + 2 = 0$
$b^2 - 4.a.c$
$b^2 - 4 . 2 . 2$
$b^2 - 16$
$b^2 = 16$
$b = \sqrt{16}$
$b = 4$

1.6 CONCEITO DE NÚMERO COMPLEXO E SUAS REPRESENTAÇÕES (GEOMÉTRICA, ALGÉBRICA E TRIGONOMÉTRICA), RAÍZES.

NÚMEROS COMPLEXOS

Quantas vezes, ao calcularmos o valor de Delta (b^2- 4ac) na resolução da equação do 2º grau, nos deparamos com um valor negativo (Delta < 0). Nesse caso, sempre dizemos ser impossível a raiz no universo considerado (normalmente no conjunto dos reais- ***R***). A partir daí, vários matemáticos estudaram este problema, sendo Gauss e Argand os que realmente conseguiram expor uma interpretação geométrica num outro conjunto de números, chamado de números complexos, que representamos por ***C***.

Números Complexos

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por ***C***, o conjunto de pares ordenados, ou seja:

z = (x,y)

onde x pertence a **R** e y pertence a **R**.

Então, por definição, se z = (x,y) = (x,0) + (y,0)(0,1) onde i=(0,1), podemos escrever que:

z=(x,y)=x+yi

Exemplos:
(5,3)=5+3i
(2,1)=2+i
(-1,3)=-1+3i

Dessa forma, todo o números complexo **z=(x,y)** pode ser escrito na forma **z=x+yi**, conhecido como forma algébrica, onde temos:

x=Re(z, parte real de z

y=Im(z), parte imaginária de z

Igualdade entre números complexos: Dois números complexos são iguais se, e somente se, apresentam simultaneamente iguais a parte real e a parte imaginária. Assim, se z_1=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$\mathbf{z_1=z_2 \Longleftrightarrow a=c \text{ e } b=d}$

Adição de números complexos: Para somarmos dois números complexos basta somarmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se z=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$\mathbf{z_1+z_2=(a+c) + (b+d)}$

Subtração de números complexos: Para subtrairmos dois números complexos basta subtrairmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se z=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$\mathbf{z_1-z_2=(a-c) + (b-d)}$

Potências de i

Se, por definição, temos que i = - $(-1)^{1/2}$, então:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$i^4 = i^2.i^2=-1.-1=1$

$i^5 = i^4. 1=1.i= i$

$i^6 = i^5. i =i.i=i^2=-1$

$i^7 = i^6. i =(-1).i=-i$ ......

Observamos que no desenvolvimento de i^n (**n** pertencente a *N*, com **n** variando, os valores repetem-se de **4** em **4** unidades. Desta forma, para calcularmos i^n basta calcularmos $\mathbf{i^r}$ onde **r** é o resto da divisão de **n** por **4**.

Exemplo: i^{63} => 63 / 4 dá resto 3, logo $i^{63}=i^3=-i$

Multiplicação de números complexos: Para multiplicarmos dois números complexos basta efetuarmos a multiplicação de dois binômios, observando os valores das potência de **i**. Assim, se z_1=a+bi e z_2=c+di, temos que:

$z_1.z_2 = a.c + adi + bci + bdi^2$

$z_1.z_2= a.c + bdi^2 = adi + bci$

$z_1.z_2= (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observar que : $i^2= -1$

Conjugado de um número complexo: Dado z=a+bi, define-se como conjugado de z (representa-se por z^-) ==> z^-= a-bi

Exemplo:

z=3 - 5i ==> z^- = 3 + 5i

z = 7i ==> z^- = - 7i

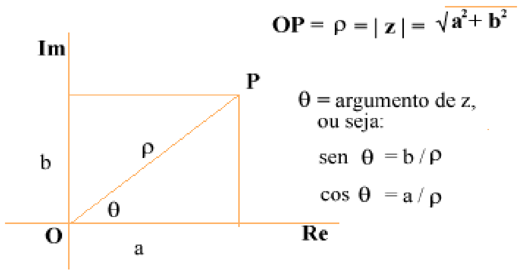
z = 3 ==> z^- = 3

Divisão de números complexos: Para dividirmos dois números complexos basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Assim, se z_1= a + bi e z_2= c + di, temos que:

$z_1 / z_2 = [z_1.z_2^-] / [z_2z_2^-] = [(a+bi)(c-di)] / [(c+di)(c-di)]$

Módulo de um número complexo: Dado z = a+bi, chama-se módulo de z ==> | z | = $(a^2+b^2)^{1/2}$, conhecido como ro

Interpretação geométrica: Como dissemos, no início, a interpretação geométrica dos números complexos é que deu o impulso para o seu estudo. Assim, representamos o complexo z = a+bi da seguinte maneira



Forma polar dos números complexos: Da interpretação geométrica, temos que:

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\,sen\,\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$$

que é conhecida como forma polar ou trigonométrica de um número complexo.

Operações na forma polar: Sejam z_1=ro_1(cos t_{11}) e z_2=ro_1(cos t_1+i sent_1). Então, temos que:

a)Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,sen(\theta_1+\theta_2)]$$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,sen(\theta_1-\theta_2)]$$

Potenciação

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i\,sen(n\theta)]$$

Radiciação

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\,\{\cos[(\theta+2k\pi)/n] + i\,sen[(\theta+2k\pi)/n]\}$$

para n = 0, 1, 2, 3, ..., n-1

Exercícios

1 - Sejam os complexos $\mathbf{z_1=(2x+1) + yi}$ **e** $\mathbf{z_2=-y + 2i}$**.** Determine **x** e **y** de modo que $z_1 + z_2 = 0$

2 - Determine **x**, de modo que **z = (x+2i)(1+i)** seja imaginário puro.

3 - Qual é o conjugado de **z = (2+i) / (7-3i)**?

4 - Os módulos de $\mathbf{z_1 = x + 20^{1/2}i}$ e $\mathbf{z_2 = (x-2) + 6i}$ são iguais, qual o valor de **x**?

5 - Escreva na forma trigonométrica o complexo **z = (1+i) / i**

Respostas

Resolução 01.
Temos que:
$z_1 + z_2 = (2x + 1 - y) + (y + 2) = 0$
logo, é preciso que:
$2x+1 - y = 0$ e $y+2 = 0$
Resolvendo, temos que **y = -2 e x = -3/2**

Resolução 02.
Efetuando a multiplicação, temos que:
$z = x + (x+2)i + 2i^2$
$z = (x-2) + (x+2)i$
Para z ser imaginário puro é necessário que (x-2)=0, logo **x=2**

Resolução 03.
Efetuando a divisão, temos que:
z = (2+i) / (7-3i) . (7+3i) / (7+3i) = (11 + 3i) / 58
O conjugado de Z seria, então z^- **= 11/58 - 13i/58**

Resolução 04.
Então, $|z_1 = (x^2 + 20)^{1/2} = |z_2 = [(x-2)^2 + 36\}^{1/2}$
Em decorrência,
$x^2 + 20 = x^2 - 4x + 4 + 36$
$20 = -4x + 40$
4x = 20, logo **x=5**

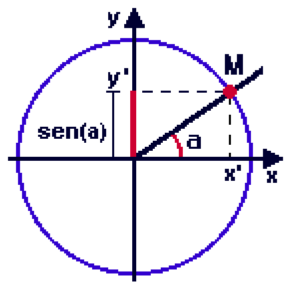
Resolução 05.
Efetuando-se a divisão, temos:
$z = [(1+i). -i] / -i^2 = (-i -i^2) = 1 – i$
Para a forma trigonométrica, temos que:
$r = (1 + 1)^{1/2} = 2^{1/2}$
$\text{sen } t = -1/2^{1/2} = - 2^{1/2} / 2$
$\cos t = 1 / 2^{1/2} = 2^{1/2} / 2$
Pelos valores do seno e cosseno, verificamos que t = 315º
Lembrando que a forma trigonométrica é dada por:
z = r(cos t + i sen t), temos que:
$z = 2^{1/2}$ (cos 315º + i sen 315º)

Circunferência Trigonométrica

Dada uma circunferência trigonométrica contendo o ponto A=(1,0) e um número real x, existe sempre um arco orientado AM sobre esta circunferência, cuja medida algébrica corresponde a x radianos.

Seno: No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja M=(x’,y’) um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a. A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto C=(x’,0) e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto B=(0,y’).

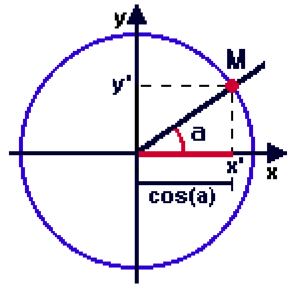
A medida do segmento OB coincide com a ordenada y’ do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a, denotado por sen(AM) ou sen(a).



Como temos várias determinações para o mesmo ângulo, escreveremos sen(AM)=sen(a)=sen(a+2kπ)=y’

Para simplificar os enunciados e definições seguintes, escreveremos sen(x) para denotar o seno do arco de medida x radianos.

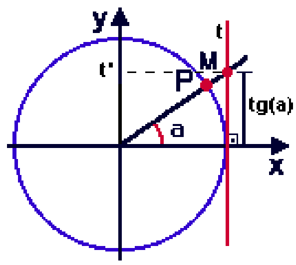
Cosseno: O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo a, denotado por cos(AM) ou cos(a), é a medida do segmento 0C, que coincide com a abscissa x’ do ponto M.



Como antes, existem várias determinações para este ângulo, razão pela qual, escrevemos cos(AM) = cos(a) = cos(a+2kπ) = x’

Tangente

Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto A=(1,0). Tal reta é perpendicular ao eixo OX. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente t no ponto T=(1,t’). A ordenada deste ponto T, é definida como a tangente do arco AM correspondente ao ângulo a.



Assim a tangente do ângulo a é dada pelas suas várias determinações: tan(AM) = tan(a) = tan(a+kπ) = µ(AT) = t’

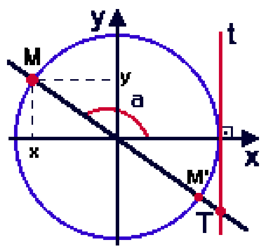
Podemos escrever M=(cos(a),sen(a)) e T=(1,tan(a)), para cada ângulo a do primeiro quadrante. O seno, o cosseno e a tangente de ângulos do primeiro quadrante são todos positivos.

Um caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo horizontal OX. Neste caso: cos(0)=1, sen(0)=0 e tan(0)=0

Ampliaremos estas noções para ângulos nos outros quadrantes

Ângulos no segundo quadrante

Se na circunferência trigonométrica, tomamos o ponto M no segundo quadrante, então o ângulo a entre o eixo OX e o segmento OM pertence ao intervalo $\pi/2<a<\pi$. Do mesmo modo que no primeiro quadrante, o cosseno está relacionado com a abscissa do ponto M e o seno com a ordenada deste ponto. Como o ponto M=(x,y) possui abscissa negativa e ordenada positiva, o sinal do seno do ângulo a no segundo quadrante é positivo, o cosseno do ângulo a é negativo e a tangente do ângulo a é negativa.

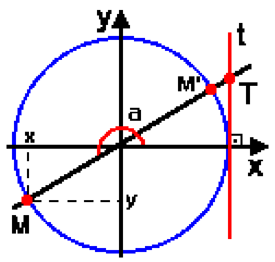


Outro caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo vertical OY e neste caso: cos(π/2)=0 e sen(π/2)=1

A tangente não está definida, pois a reta OM não intercepta a reta t, pois elas são paralelas.

Ângulos no terceiro quadrante

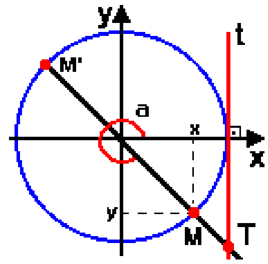
O ponto M=(x,y) está localizado no terceiro quadrante, o que significa que o ângulo pertence ao intervalo: $\pi<a<3\pi/2$. Este ponto M=(x,y) é simétrico ao ponto M'=(-x,-y) do primeiro quadrante, em relação à origem do sistema, indicando que tanto a sua abscissa como a sua ordenada são negativos. O seno e o cosseno de um ângulo no terceiro quadrante são negativos e a tangente é positiva.



Em particular, se a=π radianos, temos que cos(π)=-1, sen(π)=0 e tan(π)=0

Ângulos no quarto quadrante

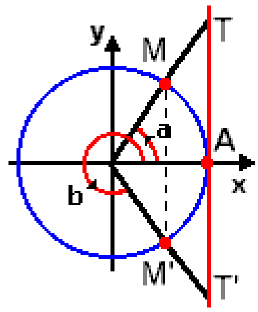
O ponto M está no quarto quadrante, $3\pi/2<a<2\pi$. O seno de ângulos no quarto quadrante é negativo, o cosseno é positivo e a tangente é negativa.



Quando o ângulo mede $3\pi/2$, a tangente não está definida pois a reta OP não intercepta a reta t, estas são paralelas. Quando a=$3\pi/2$, temos: cos($3\pi/2$)=0, sin($3\pi/2$)=-1

Simetria em relação ao eixo OX

Em uma circunferência trigonométrica, se M é um ponto no primeiro quadrante e M' o simétrico de M em relação ao eixo OX, estes pontos M e M' possuem a mesma abscissa e as ordenadas possuem sinais opostos.



Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM', obtemos:

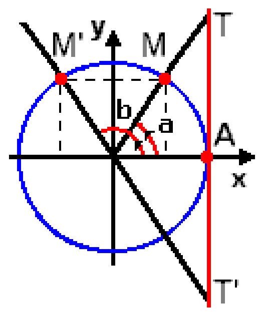
sen(a) = -sen(b)

cos(a) = cos(b)

tan(a) = -tan(b)

Simetria em relação ao eixo OY

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico a M em relação ao eixo OY, estes pontos M e M' possuem a mesma ordenada e as abscissa são simétricas.

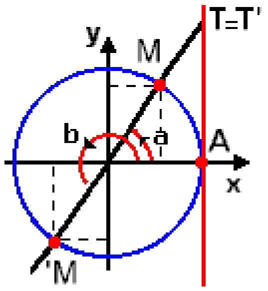


Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

sen(a) = sen(b)
cos(a) = -cos(b)
tan(a) = -tan(b)

Simetria em relação à origem

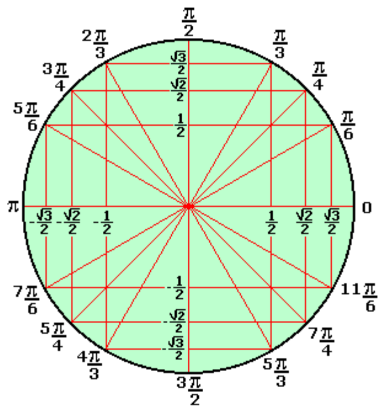
Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico de M em relação a origem, estes pontos M e M' possuem ordenadas e abscissas simétricas.



Sejam A=(1,0) um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:
sen(a) = -sen(b)
cos(a) = -cos(b)
tan(a) = tan(b)

Senos e cossenos de alguns ângulos notáveis

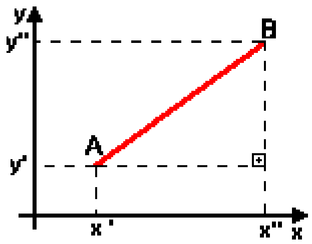
Uma maneira de obter o valor do seno e cosseno de alguns ângulos que aparecem com muita frequência em exercícios e aplicações, sem necessidade de memorização, é através de simples observação no círculo trigonométrico.



Primeira relação fundamental

Uma identidade fundamental na trigonometria, que realiza um papel muito importante em todas as áreas da Matemática e também das aplicações é: $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ que é verdadeira para todo ângulo a.

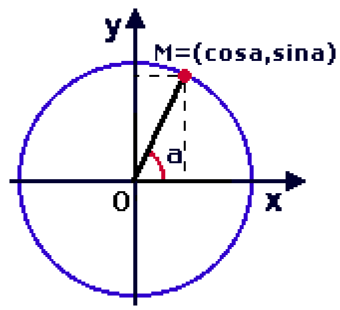
Necessitaremos do conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano, que nada mais é do que a relação de Pitágoras. Sejam dois pontos, A=(x',y') e B=(x",y").



Definimos a distância entre A e B, denotando-a por d(A,B), como:

$$d(A,B) = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

Se M é um ponto da circunferência trigonométrica, cujas coordenadas são indicadas por (cos(a),sen(a)) e a distância deste ponto até a origem (0,0) é igual a 1. Utilizando a fórmula da distância, aplicada a estes pontos, $d(M,0)=[(\cos(a)-0)^2+(\text{sen}(a)-0)^2]^{1/2}$, de onde segue que $1=\cos^2(a)+\sin^2(a)$.



Segunda relação fundamental

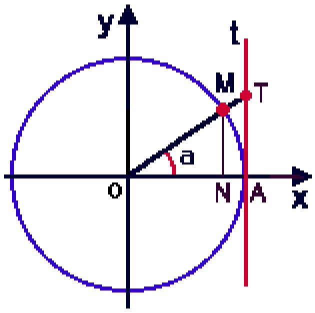
Outra relação fundamental na trigonometria, muitas vezes tomada como a definição da função tangente, é dada por:

$$\tan(a) = \frac{sen(a)}{\cos(a)}$$

Deve ficar claro, que este quociente somente fará sentido quando o denominador não se anular.

Se a=0, a=π ou a=2π, temos que sen(a)=0, implicando que tan(a)=0, mas se a=π/2 ou a=3π/2, segue que cos(a)=0 e a divisão acima não tem sentido, assim a relação tan(a)=sen(a)/cos(a) não é verdadeira para estes últimos valores de a.

Para $a \neq 0$, $a \neq \pi$, $a \neq 2\pi$, $a \neq \pi/2$ e $a \neq 3\pi/2$, considere novamente a circunferência trigonométrica na figura seguinte.



Os triângulos OMN e OTA são semelhantes, logo:

$$\frac{AT}{MN} = \frac{OA}{ON}$$

Como AT=|tan(a)|, MN=|sen(a)|, OA=1 e ON=|cos(a)|, para todo ângulo a, $0 \leq a \leq 2\pi$ com $a \neq \pi/2$ e $a \neq 3\pi/2$ temos

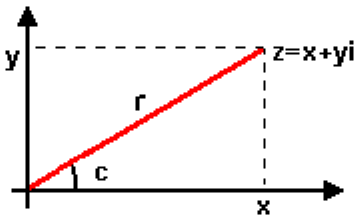
$$\tan(a) = \frac{sen(a)}{\cos(a)}$$

Forma polar dos números complexos

Um número complexo não nulo z=x+yi, pode ser representado pela sua forma polar:

z = r [cos(c) + i sen(c)]

onde r=|z|=R[x^2+y^2], $i^2=-1$ e c é o argumento (ângulo formado entre o segmento Oz e o eixo OX) do número complexo z.



A multiplicação de dois números complexos na forma polar:

A = |A| [cos(a)+isen(a)]

B = |B| [cos(b)+isen(b)]

é dada pela Fórmula de De Moivre:

AB = |A||B| [cos(a+b)+isen(a+b)]

Isto é, para multiplicar dois números complexos em suas formas trigonométricas, devemos multiplicar os seus módulos e somar os seus argumentos.

Se os números complexos A e B são unitários então |A|=1 e |B|=1, e nesse caso

A = cos(a) + i sen(a)

B = cos(b) + i sen(b)

Multiplicando A e B, obtemos

AB = cos(a+b) + i sen(a+b)

Existe uma importantíssima relação matemática, atribuída a Euler (lê-se "óiler"), garantindo que para todo número complexo z e também para todo número real z:

e^{iz} = cos(z) + i sen(z)

Tal relação, normalmente é demonstrada em um curso de Cálculo Diferencial, e, ela permite uma outra forma para representar números complexos unitários A e B, como:

A = e^{ia} = cos(a) + i sen(a)

B = e^{ib} = cos(b) + i sen(b)

onde a é o argumento de A e b é o argumento de B. Assim, $e^{i(a+b)}$ = cos(a+b)+isen(a+b)

Por outro lado $e^{i(a+b)}$ = e^{ia} . e^{ib} = [cos(a)+isen(a)] [cos(b)+isen(b)]

e desse modo $e^{i(a+b)}$ = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b) + i [cos(a) sen(b) + cos(b)sen(a)]

Para que dois números complexos sejam iguais, suas partes reais e imaginárias devem ser iguais, logo

cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)

sen(a+b) = cos(a)sen(b) + cos(b)sen(a)

Para a diferença de arcos, substituímos b por -b nas fórmulas da soma

cos(a+(-b)) = cos(a)cos(-b) - sen(a)sen(-b)

sen(a+(-b)) = cos(a)sen(-b) + cos(-b)sen(a)

para obter

cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)

sen(a-b) = cos(b)sen(a) - cos(a)sen(b)

Seno, cosseno e tangente da soma e da diferença

Na circunferência trigonométrica, sejam os ângulos a e b com 0£a£2π e 0£b£2π, a>b, então;

sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)

cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)

Dividindo a expressão de cima pela de baixo, obtemos:

$$\tan(a+b) = \frac{sen(a)\cos(b) + \cos(a)sen(b)}{\cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b)}$$

Dividindo todos os quatro termos da fração por cos(a)cos(b), segue a fórmula:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Como

sen(a-b) = sen(a)cos(b) - cos(a)sen(b)

cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)

podemos dividir a expressão de cima pela de baixo, para obter:

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

1.7 SISTEMAS LINEARES E MATRIZES, DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES (DE ATÉ 2 EQUAÇÕES E 2 INCÓGNITAS).

Sistema Linear

O estudo dos sistemas de equações lineares é de fundamental importância em Matemática e nas ciências em geral. Você provavelmente já resolveu sistemas do primeiro grau, mais precisamente aqueles com duas equações e duas incógnitas.

Vamos ampliar esse conhecimento desenvolvendo métodos que permitam resolver, quando possível, sistemas de equações do primeiro grau com qualquer número de equações e incógnitas. Esses métodos nos permitirão não só resolver sistemas, mas também classificá-los quanto ao número de soluções.

Equações Lineares

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, a_3, .., a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, .., x_n$ são as incógnitas.

Os números reais $a_1, a_2, a_3, .., a_n$ são chamados de coeficientes e b é o termo independente.

Exemplos

- São equações lineares:

$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$

$2x – y + 2z = 1$

$0x + 0y + 0z = 2$

$0x + 0y + 0z = 0$

- Não são equações lineares:

$x^3 - 2y + z = 3$

(x^3 é o impedimento)

$2x_1 – 3x_1x_2 + x_3 = -1$

($-3x_1x_2$ é o impedimento)

$2x_1 – 3 \frac{3}{x_2} + x_3 = 0$

($\frac{3}{x_2}$ é o impedimento)

Observação: Uma equação é linear quando os expoentes das incógnitas forem iguais a l e em cada termo da equação existir uma única incógnita.

Solução de ama Equação Linear

Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, é um conjunto ordenado de números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ para o qual a sentença $a_1\{\alpha_1) + a_2\{\alpha a_2) + a_3(\alpha_3) + ... + a_n(\alpha_n) = b$ é verdadeira.

Exemplos

- A terna (2, 3, 1) é solução da equação:

$x_1 – 2x_2 + 3x_3 = -1$ pois:

$(2) – 2.((3) + 3.(1) = -1$

- A quadra (5, 2, 7, 4) é solução da equação:

$0x_1 - 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ pois:

$0.(5) + 0.(2) + 0.(7) + 0.(4) = 0$

Conjunto Solução

Chamamos de conjunto solução de uma equação linear o conjunto formado por todas as suas soluções.

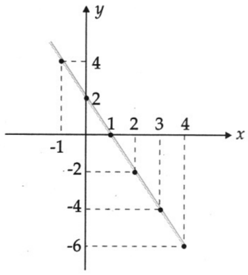
Observação: Em uma equação linear com 2 incógnitas, o conjunto solução pode ser representado graficamente pelos pontos de uma reta do plano cartesiano.

Assim, por exemplo, na equação

$2x + y = 2$

Algumas soluções são (1, 0), (2, -2), (3, -4), (4, -6), (0, 2), (-1,4), etc.

Representando todos os pares ordenados que são soluções da equação dada, temos:



Equação Linear Homogênea

Uma equação linear é chamada homogênea quando o seu termo independente for nulo.

Exemplo

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0$

Observação: Toda equação homogênea admite como solução o conjunto ordenado de "zeros" que chamamos solução nula ou solução trivial.

Exemplo

(0, 0, 0) é solução de $3x + y - z – 0$

Equações Lineares Especiais

Dada a equação:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... a_nx_n = b$, temos:

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = na = b = 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n$, e, neste caso, qualquer seqüências ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$) será solução da equação dada.

- Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$ e $b \neq 0$, ficamos com:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + ... + 0x_n = b \neq 0$, e, neste caso, não existe seqüências de reais ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$) que seja solução da equação dada.

Sistema Linear 2 x 2

Chamamos de sistema linear 2 x 2 o conjunto de equações lineares a duas incógnitas, consideradas simultaneamente.

Todo sistema linear 2 x 2 admite a forma geral abaixo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2 + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Um par (α_1, α_2) é solução do sistema linear 2 x 2 se, e somente se, for solução das duas equações do sistema.

Exemplo
(3, 4) é solução do sistema

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=10 \end{cases}$$

pois é solução de suas 2 equações:
(3)-(4) = -1 e 2.(3) + (4) = 10

Resolução de um Sistema 2 x 2

Resolver um sistema linear 2 x 2 significa obter o conjunto solução do sistema.

Os dois métodos mais utilizados para a resolução de um sistema linear 2x2 são o método da substituição e o método da adi**ção.**

Para exemplificar, vamos resolver o sistema 2 x 2 abaixo usando os dois métodos citados.

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

1. M**étodo da Substituição:**

$$\begin{cases} 2x+3y=8 & (I) \\ x-y\ \ =-1 & (II) \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos x = y -1, que substituímos na equação (I)

2(y- 1) +3y = 8 ➔ 5y = 10 ➔ y = 2

Fazendo y = 2 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

2. Método da Adição:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 & (I) \\ x-y=-1 & (II) \end{cases}$$

Multiplicamos a equação II por 3 e a adicionamos, membro a membro, com a equação I.

$$\begin{cases} \ \ 2x+3y=8 \\ \ \ \underline{3x-3y=-3} \\ 5x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{5}=1 \end{cases}$$

Fazendo x = 1 na equação (I), por exemplo, obtemos:
Assim: S = {(1,2)}

Sistema Linear 2 x 2 com infinitas soluções

Quando uma equação de um sistema linear 2 x 2 puder ser obtida multiplicando-se a outra por um número real, ao tentarmos resolver esse sistema, chegamos numa igualdade que é sempre verdadeira, independente das incógnitas. Nesse caso, existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x+3y=8(I) \\ -4x-6y=-16(II) \end{cases}$$

Note que multiplicando-se a equação (I) por (-2) obtemos a equação (II).

Resolvendo o sistema pelo método da substituição temos:

Da equação (I), obtemos y $=\frac{8-2x}{3}$, que substituímos na equação (II).

-4x-6.$\left(\frac{8-2x}{3}\right)$=-16 →-4x-2(8-2x)=-16

-4x-16+4x=-16→-16=-16

- 16= -16 é uma igualdade verdadeira e existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Entre outros, (1, 2), (4, 0), $\left(\frac{5}{2},1\right)$ e $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ são soluções do sistema.

Sendo a, um número real qualquer, dizemos que $\left(\alpha,\frac{8-2\alpha}{3}\right)$ é solução do sistema.

(Obtemos $\frac{8-2\alpha}{3}$ substituindo x =α na equação (I)).

Sistema Linear 2 x 2 com nenhuma solução

Quando duas equações lineares têm os mesmos coeficientes, porém os termos independentes são diferentes, dizemos que não existe solução comum para as duas equações, pois substituindo uma na outra, obtemos uma igualdade sempre falsa.

Exemplo
2x+3y=6(I) e 2x+3y=5(II)

Substituindo 2x+3y da equação (I) na equação (II) obtemos:

6=5 que é uma igualdade falsa. Se num sistema 2x2 existir um número real que, multiplicado por uma das equações, resulta uma equação com os mesmos coeficientes da outra equação do sistema, porém com termos independentes diferentes, dizemos que não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(II) \end{cases}$$

Multiplicando-se equação (I) por 2 obtemos:
2x+4y=10

Que tem os mesmo coeficientes da equação (II), porém os termos independentes são diferentes.

Se tentarmos resolver o sistema dado pelo método de substituição, obtemos uma igualdade que é sempre falsa, independente das incógnitas.

$$\begin{cases} x+2y=5(I) \\ 2x+4y=7(II) \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos ,$\left(y=\frac{5-x}{2}\right)$ que substituímos na equação (II)

2x- 4.$\left(\frac{5-x}{2}\right)$=7→2x+2(5-x)=7

2x+10-2x=7→10=7

10=7 é uma igualdade falsa e não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Classificação

De acordo com o número de soluções, um sistema linear 2x2 pode ser classificado em:

- Sistema Impossíveis ou Incompatíveis: são os sistemas que não possuem solução alguma.
- Sistemas Possíveis ou compatíveis: são os sistemas que apresentam pelo menos uma solução.
- Sistemas Possíveis Determinados: se possuem uma única solução.
- Sistemas Possíveis Indeterminados: se possuem infinitas soluções.

Sistema Linear m x n

Chamamos de sistema linear M x n ao conjunto de m equações a n incógnitas, consideradas simultaneamente, que podem ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \text{...} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde:

$X_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ são as incógnitas;

a_{ij}, com $1 \le i \le m$ e $1 \le n$, são os coeficientes das incógnitas; b_i, com $1 \le i \le m$, são os termos independentes.

Exemplos

1.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - z + 2 \end{cases}$$
(sistema 2 x 3)

2.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(sistema 3 x 4)

3.
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

(sistema 3 x 2)

Matriz Incompleta

Chamamos de matriz incompleta do sistema linear a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \text{.................} & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

No sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + \quad z = 0 \\ -x + y \quad = 5 \end{cases}$$

A matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

Consideremos o sistema linear M x n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \text{...} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sendo A a Matriz incompleta do sistema chamamos, respectivamente, as matrizes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

de matriz incógnita e matriz termos independentes.

E dizemos que a forma matricial do sistema é A.X=B, ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares – Escalonamento (I)

Resolução de um Sistema por Substituição

Resolvemos um sistema linear *m* x *n* por substituição, do mesmo modo que fazemos num sistema linear 2 x 2. Assim, observemos os exemplos a seguir.

Exemplos

- Resolver o sistema pelo método da substituição.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \quad (I) \\ 2x - y + z = 5 \quad (II) \\ x + 3y - 2z = -4 (III) \end{cases}$$

Resolução

Isolando a incógnita *x* na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:

$x + 2y - z - 1 \rightarrow x = -2y + z - 1$

Na equação (II)

$2(-2y + z - 1) - y + z = 5 \rightarrow -5y + 3z = 7$ (IV)

Na equação (III)

$(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 \rightarrow y - z = -3$ (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y + 3z = 7 \quad (IV) \\ y - z = -3 \quad (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita *y* na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:

$y - z = -3 \rightarrow y = z - 3$

$-5 (z - 3) + 3z = 7 \rightarrow z = 4$

Substituindo $z = 4$ na equação (V)

$y - 4 = -3 \rightarrow y = 1$

Substituindo $y = 1$ e $z = 4$ na equação (I)

$x + 2 (1) - (4) = -1 \rightarrow x = 1$

Assim:

$S=\{(1, 1, 4)\}$

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \quad (I) \\ y + 2z = 10 \quad (II) \\ 3z = 12 \quad (III) \end{cases}$$

Resolução

Isolando a incógnita *x* na equação (I) e substituindo nas equações (II) e (III), temos:

$x + 2y - z = -1 \rightarrow x = -2y + z - 1$

Na equação (II)

$2(-2y + z - 1) - y + z = 5 \rightarrow 5y + 3z = 7$ (IV)

Na equação (III)

$(-2y + z - 1) + 3y - 2z = -4 \rightarrow y - z = -3$ (V)

Tomando agora o sistema formado pelas equações (IV) e (V):

$$\begin{cases} -5y + 3z = 7 \quad (IV) \\ y - z = -3 \quad (V) \end{cases}$$

Isolando a incógnita *y* na equação (V) e substituindo na equação (IV), temos:

$y - z = -3 \rightarrow y = z - 3$

$-5(z - 3) + 3z = 7 \rightarrow z = 4$

Substituindo $z = 4$ na equação (V)

$y - 4 = -3 \rightarrow y = 1$

Substituindo $y = 1$ e $z = 4$ na equação (I)

$x + 2(1) - (4) = -1 \rightarrow x = 1$

Assim:

$S=\{(1, 1, 4)\}$

2º) Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \quad (I) \\ y + 2z = 10 \quad (II) \\ 3z = 12 \quad (III) \end{cases}$$

Resolução

Na equação (III), obtemos:

$3z = 12 \rightarrow z = 4$

Substituindo $z = 4$ na equação (II), obtemos:

$y + 2 . 4 = 10 \rightarrow y = 2$

Substituindo $z = 4$ e $y = 2$ na equação (I), obtemos:

$x + 3 . 2 - 4 = 1 \rightarrow x = -1$

Assim:

$S\{(-1, 2, 4)\}$

Observação: Podemos observar que a resolução de sistemas pelo método da substituição pode ser demasiadamente longa e trabalhosa, quando os sistemas não apresentam alguma forma simplificada como no primeiro exemplo. No entanto, quando o sistema apresenta a forma simples do segundo exemplo, que denominamos "forma escalonada", a resolução pelo método da substituição é rápida e fácil.

Veremos, a seguir, como transformar um sistema linear *m* x *n* qualquer em um **sistema equivalente** na "forma escalonada".

Sistemas Lineares Escalonados

Dizemos que um sistema linear é um **sistema escalonado** quando:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não-nulo;

- O número de coeficiente nulos, antes do primeiro coeficiente não-nulo, cresce "da esquerda para a direita, de equação para equação".

Exemplos

1º) $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 2y+3z=2 \end{cases}$

2º) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=3 \\ z=1 \end{cases}$

3º) $\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ y-t=2 \end{cases}$

4º) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_4=5 \end{cases}$

Existem dois tipos de sistemas escalonados:

Tipo: número de equações **igual** ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{33}x_{33}+\cdots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Notamos que os sistemas deste tipo podem ser analisados pelo método de Cramer, pois são sistemas *n* x *n*. Assim, sendo *D* o determinante da matriz dos coeficientes (incompleta), temos:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n} \\ 0\ \ a_{22}a_{23}\cdots a_{2n} \\ 0\ \ 0\ \ a_{33}\cdots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ 0\ \ 0\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=D=a_{11}.a_{22}.a_{33}.\cdots.a_{nn}\neq 0$$

Como $D\neq 0$, os sistemas deste tipo são possíveis e determinados e, para obtermos a solução única, partimos da n-ésima equação que nos dá o valor de x_n; por substituição nas equações anteriores, obtemos sucessivamente os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_3, x_2$ e x_1.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=5(I) \\ y+z+3t=9(II) \\ 2z-t=0(III) \\ 3t=6(IV) \end{cases}$$

Resolução

Na equação (IV), temos:
$3t = 6 \rightarrow t = 2$
Substituindo $t = 2$ na equação (III), temos:
$2z - 2 = 0 \rightarrow z = 1$
Substituindo $t = 2$ e $z = 1$ na equação (II), temos:
$y + 1 + 3 . 2 = 9 \rightarrow y = 2$
Substituindo $t = 2$, $z = 1$ e $y = 2$, na equação (I), temos:
$2x + 2 - 1 + 2 = 5 \rightarrow x = 1$
Assim:
S {(1, 2, 1, 2)}

Tipo: número de equações **menor** que o número de incógnitas.

Para resolvermos os sistemas lineares deste tipo, devemos transformá-los em sistemas do 1º tipo, do seguinte modo:

- As incógnitas que não aparecem no inicio de nenhuma das equações do sistema, chamadas **variáveis livres,** devem ser "passadas" para os segundos membros das equações. Obtemos, assim, um sistema em que consideramos incógnitas apenas as equações que "sobraram" nos primeiros membros.

- Atribuímos às variáveis livres valores literais, na verdade "valores variáveis", e resolvemos o sistema por substituição.

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2y-z=2 \end{cases}$$

Resolução

A variável z é uma "*variável livre*" no sistema.
Então:

$$\begin{cases} x+y=1-2z \\ 2y=2+z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x+y=1-2\alpha \\ 2y=2+\alpha \end{cases}$$

$$2y=2+\alpha \rightarrow y=\frac{2+\alpha}{2}$$

Substituindo y = $\frac{2+\alpha}{2}$ na 1ª equação, temos:

$$x+\frac{2+\alpha}{2}=1-2\alpha$$

Agora para continuar fazemos o mmc de 2, e teremos:

2x + 2α = 2(1-2α)
2x + 2α = 2 - 4α
4α + 2x + 2 + α - 2 = 0
5α + 2x = 0
2x = -5α
x = $\frac{-5\alpha}{2}$

Assim:

$$S=\left\{\left(\frac{5\alpha}{2},\ \frac{2+\alpha}{2},\alpha\right),\alpha\in R\right\}$$

Observações: Para cada valor real atribuído a α, encontramos uma solução do sistema, o que permite concluir que o sistema é **possível** e **indeterminado**.

- A quantidade de variáveis livres que um sistema apresenta é chamada de **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** do sistema.

Sistema Lineares – Escalonamento (II)

Escalonamento de um Sistema

Todo sistema linear possível pode ser transformado num sistema linear escalonado equivalente, através das **transformações elementares** a seguir.

- Trocar a ordem em que as equações aparecem no sistema.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x-y=5 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

- Inverter a ordem em que as incógnitas aparecem nas equações.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x+2z=1 \\ 3x=5 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} 2y+z+x=5 \\ 2z+x=1 \\ 3x=5 \end{cases}$$

- Multiplicar (ou dividir) uma equação por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S)\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+2y=3 \\ 6x-2y=3 \end{cases}$$

Multiplicamos a 2ª equação de S por 2, para obtermos S_1.

- Adicionar a uma equação uma outra equação do sistema, previamente multiplicada por um número real não-nulo.

Exemplo

$$(S)=\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases} \sim (S_1)\begin{cases} x+3y=5 \\ -5y=-7 \end{cases}$$

Multiplicamos a 1ª equação do S por -2 e a adicionamos à 2ª equação para obtermos s_1.

Para transformarmos um sistema linear (S) em outro, **equivalente** e escalonado (S_1), seguimos os seguintes passos.

- Usando os recursos das três primeiras transformações elementares, devemos obter um sistema em que a 1ª equação tem a 1ª incógnita com o coeficiente igual a 1.
- Usando a quarta transformação elementar, devemos "zerar" todos os coeficientes da 1ª incógnita em todas as equações restantes.
- "Abandonamos" a 1ª equação e repetimos os dois primeiros passos com as equações restantes, e assim por diante, até a penúltima equação do sistema.

Exemplos

1º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 3x-y2z=-2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \\ 2x+y+z=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-2 & \leftarrow -3 \\ 2x+y+z=5 & \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -7y+z=-5 \\ -3y+3z=3: \quad -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ -7y+z=5 \\ y-z=-1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -7y+z=-5 \quad \leftarrow 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=-1 \\ -6z=-12 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (nº de equações igual ao nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e determinado.

2º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 8x+y+z=11 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ 8x+y+z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ -y+2x+3z=5 \quad \leftarrow 1 \\ y+8x+z=11 \quad \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ 5x+2z=8 \\ 5x+2z=8(*) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y+3x-z=3 \\ 5x+2z=8 \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º tipo (nº de equações menor que o nº de incógnitas), portanto, é um sistema possível e indeterminado.

(*) A terceira equação foi eliminada do sistema, visto que ela é equivalente à segunda equação. Se nós não tivéssemos percebido essa equivalência, no passo seguinte obteríamos na terceira equação: $0x+0z=0$, que é uma equação satisfeita para todos os valores reais de x e z.

3º) Escalonar e classificar o sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ 4x+9y-z=8 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x+5y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ 4x+9y-z=8 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+5y+z=5 \quad \leftarrow -2 \\ 4x+9y-z=8 \quad \leftarrow -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=-1 \\ y+3z=-4 \quad \leftarrow -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+3z=-1 \\ 0y+0z=-3 \quad \leftarrow -1 \end{cases}$$

O sistema obtido é impossível, pois a terceira equação nunca será verificada para valores reais de y e z.

Observação

Dado um sistema linear, sempre podemos "tentar" o seu escalonamento. Caso ele seja impossível, isto ficará evidente pela presença de uma equação que não é satisfeita por valores reais (exemplo: $0x + 0y = 3$). No entanto, se o sistema é possível, nós sempre conseguimos um sistema escalonado equivalente, que terá nº de equações igual ao nº de incógnitas (possível e determinado), ou então o nº de equações será menor que o nº de incógnitas (possível e indeterminado).

Este tratamento dado a um sistema linear para a sua resolução é chamado de **método de eliminação de Gauss.**

Sistemas Lineares – Discussão (I)

Discutir um sistema linear é determinar; quando ele é:
- Possível e determinado (solução única);
- Possível e indeterminado (infinitas soluções);
- Impossível (nenhuma solução), em função de um ou mais **parâmetros** presentes no sistema.

Estudaremos as técnicas de discussão de sistemas com o auxilio de exemplos.

Sistemas com Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta nº de equações igual ao nº de incógnitas, para discutirmos o sistema, inicialmente calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes (incompleta), e:

1º) Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

2º) Se $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

Para identificarmos se o sistema é possível, indeterminado ou impossível, devemos conseguir um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminação de Gauss.

Exemplos

01 – Discutir, em função de a, o sistema:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a-6$$

$$D = 0 \Rightarrow a-6=0 \Rightarrow a=6$$

Assim, para $a \neq 6$, o sistema é possível e determinado.

Para $a \neq 6$, temos:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=1 \quad \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+3y=5 \\ 0x+0y=-9 \end{cases}$$

que é um sistema impossível.

Assim, temos:

$a \neq 6 \rightarrow$ *SPD* (Sistema possível e determinado)

$a=6 \rightarrow$ *SI* (Sistema impossível)

02 – Discutir, em função de *a*, o sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$$

Resolução

$$D\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9+a-2a+3-6-a^2$$

$D=0 \rightarrow -a^2-a+6=0 \rightarrow a=-3$ ou $a=2$

Assim, para $a\neq-3$ e $a\neq2$, o sistema é possível e determinado.

Para $a=-3$, temos:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y-3z=3 & \leftarrow -2 \\ x-3y+3z=2 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 & \leftarrow 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ y+z=5 & \text{sistema impossível} \end{cases}$$

Para $a=2$, temos:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 & \leftarrow -2 \\ x+2y+3z=2 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 & \text{sistema possível indeterminado} \end{cases}$$

Assim, temos:

$a\neq-3$ e $a \neq 2 \rightarrow$ SPD
$a=-3 \rightarrow$ SI
$a=2 \rightarrow$ SPI

03 – Discutir, em função de *m* e *k*, o sistema:

$$\begin{cases} mx+y=k \\ x+my=k^2 \end{cases}$$

Resolução

$$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2-1$$

$D=0 \rightarrow m^2-1=0 \rightarrow m=+1$ ou $m=-1$

Assim, para $m\neq+1$ e $m\neq-1$, o sistema é possível e determinado.
Para $m=1$, temos:

$$\begin{cases} x+y=K \\ x+y=K^2 & \leftarrow -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=K \\ 0x+0y=-K+K^2 \end{cases}$$

Se $-k+k^2=0$, ou seja, $k=0$ ou $k=1$, o sistema é possível e indeterminado.

Se $-K+k^2\neq0$, ou seja, $k\neq0$ ou $k\neq1$, o sistema é impossível.

Para $m=-1$, temos:

$$\begin{cases} -x+y=K \\ x-y=k^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=K^2 \\ -x+y=K & \leftarrow 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y=k^2 \\ Ox+Oy=k^2+k \end{cases}$$

Se k^2+k=0, ou seja, $k=0$ $k=-1$, o sistema é possível e indeterminado.
Se k^2+k$\neq$0, ou seja, $k\neq0$ $k\neq-1$, o sistema é indeterminado.

Assim, temos:

$$\left.\begin{matrix} m=+1 \;\; e \;\; k=0 \;\; ou \;\; k=1 \\ ou \\ m=-1 \;\; e \;\; k=0 \;\; ou \;\; k=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow SPI$$

$$\left.\begin{matrix} m=+1 \;\; e \;\; k\neq0 \;\; ou \;\; k\neq1 \\ ou \\ m=-1 \;\; e \;\; k\neq0 \;\; ou \;\; k\neq-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow SI$$

Sistemas com Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

Quando o sistema linear apresenta número de equações diferente do número de incógnitas, para discuti-lo, devemos obter um sistema escalonado equivalente pelo método de eliminar de Gauss.

Exemplos
01 – Discutir, em função de *m*, o sistema:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \\ x-my=3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2z+3y=8 & \rightarrow -2 \\ x-my=3 & \rightarrow -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ (-1-m)y=0 & \rightarrow 1+m \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=3 \\ y=2 \\ 0y=2+2m \end{cases}$$

$2+2m=0 \rightarrow m=-1$

Assim, temos:
$m\neq-1 \rightarrow$ SI
$m=-1 \rightarrow$ SPD

02 – Discutir, em função de k, o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 \\ 3x+7y-2z=17 \\ 5x+12y+kz=29 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+5y+3z=12 & \leftarrow -2 \\ 3x+7y-2z=17 & \leftarrow -3 \\ 5x+12y+kz=29 & \leftarrow -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ y+5z=2 & \leftarrow -1 \\ 2y+(5+K)z=4 & \leftarrow -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ 4z=0 & \div 4 \\ (3+K)z=0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 & -3-K \\ (3+K)z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \\ 0z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, para $\forall k \in R$, o sistema é possível e determinado.

Sistemas Lineares – Discussão (II)
Sistema Linear Homogêneo

Já sabemos que sistema linear homogêneo é todo sistema cujas equações têm todos os termos independentes iguais a zero.

São homogêneos os sistemas:

01 $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

02 $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 5x+3y-7z=0 \end{cases}$

Observe que a dupla (0,0) é solução do sistema 01 e a terna (0,0,0) é solução do sistema 02.

Todo sistema linear homogêneo admite como solução uma seqüência de zero, chamada **solução nula** ou **solução trivial**. Observamos também que todo sistema homogênea é sempre **possível** podendo, eventualmente, apresentar outras soluções além da solução trivial, que são chamadas soluções **próprias.**

Discussão e Resolução

Lembre-se que: todo sistema linear homogêneo tem ao menos a solução trivial, portanto será sempre possível.

Vejamos alguns exemplos:

01 – Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+5y-z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

Como $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado admitindo só a solução trivial, logo:

02 – Classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ a-3b-2c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como $D=0$, o sistema homogêneo é indeterminado.

Fazendo o escalonamento temos:

$$\begin{cases} a+\quad b+2c=0 \\ a-3b+-2c=0 \\ 2a-\quad b+c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+\quad b+2c=0 \\ 0-4b-4c=0 \\ 0-\quad 3b-3c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+2c=0 \\ 0+b+4c=0 \\ 0+0+0=0 \end{cases}$$

Teremos, então:

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

Fazendo $c=t$, teremos:
$=-c \rightarrow b=-t$
$a-t+2t=0 \rightarrow a=-t$

Portanto:

$$S=\{(-t,-t,t), t \in R\}$$

Note que variando t obteremos várias soluções, inclusive a trivial para $t=0$.

03 – Determine **K** de modo que o sistema abaixo tenha solução diferente da trivial.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ky+z=0 \\ kx-y-z=0 \end{cases}$$

Resolução

O sistema é homogêneo e, para apresentar soluções diferentes da trivial, devemos ter D=0

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0 \Rightarrow k = -1$$

Resposta: k=-1

Exercícios

1. Resolver e classificar o sistema: $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

2. Determinar *m* real, para que o sistema seja possível e determinado: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+my=2 \end{cases}$

3. Resolver e classificar o sistema: $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ x+3y=7 \\ 2x+y-2z=-4 \end{cases}$

4. Determinar *m* real para que o sistema seja possível e determinado. $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x-y+2z=5 \\ 3x+y+mz+0 \end{cases}$

5. Se o terno ordenado (2, 5, p) é solução da equação linear 6x - 7y + 2z = 5, qual o valor de p?

6. Escreva a solução genérica para a equação linear 5x - 2y + z = 14, sabendo que o terno ordenado (α, β, γ) é solução.

7. Determine o valor de m de modo que o sistema de equações abaixo,
2x - my = 10
3x + 5y = 8, seja impossível.

8. **Se os sistemas:**
S_1: x + y = 1 e S_2: ax – by = 5
X – 2y = -5 ay – bx = -1
São equivalentes, então o valor de $a^2 + b^2$ é igual a:
a) 1
b) 4
c) 5
d) 9
e) 10

9. Resolva o seguinte sistema usando a regra de Cramer:
x + 3y - 2z = 3
2x - y + z = 12
4x + 3y - 5z = 6

10. **Resolver o sistema** $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+5y=-2 \end{cases}$.

Respostas

1) Resposta "S= {(1, 2)}".
Solução: Calculemos inicialmente D, D_x e D_y:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 3 = 13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 24 = -26$$

Como D =-13 ≠ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Assim: S= {(1, 2)} e o sistema são possíveis e determinados.

2) Resposta "$\left\{ m \in R / m \neq \frac{3}{2} \right\}$".

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$, em que:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3$$

Assim: $2m - 3 \neq 0 \rightarrow m \neq \frac{3}{2}$

Então, os valores reais de m, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\left\{ m \in R / m \neq \frac{3}{2} \right\}$$

3) Resposta " S = {(1, 2, 4)}".
Solução: Calculemos inicialmente D, D_x, D_y e D_z

$$D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-18+0+1-6-0-2=-25$$

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & -1 & 1\\ 7 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-30+0+7+12-0-14=-25$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 7 & 0\\ 2 & -4 & -2\end{vmatrix}=-42+0-4-14-0+10=-50$$

$$D_z=\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ 1 & 3 & 7\\ 2 & 1 & -4\end{vmatrix}=-36-14+5-30-21-4=-100$$

Como D= -25 $\neq$ 0, o sistema é possível e determinado e:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-25}{-25}=1; y=\frac{D_y}{D}=\frac{-50}{-25}=2; z=\frac{D_z}{D}=\frac{100}{-25}=4$$

Assim: $S=\{(1,2,4)\}$ e o sistema são possíveis e determinados.

4) Resposta "$\{m \in R / m \neq 3\}$".

Solução: Segundo a regra de Cramer, devemos ter $D \neq 0$.
Assim:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & m\end{vmatrix}=-m+12+2+3-2-4m$$

D = -5m + 15
Assim: -5m + 15 $\neq$ 0 $\rightarrow$ $m \neq 3$
Então, os valores reais de m, para que o sistema seja possível e determinado, são dados pelos elementos do conjunto:

$$\{m \in R / m \neq 3\}$$

5) Resposta "14".
Solução:
Teremos por simples substituição, observando que x = 2, y = 5 e z = p, 6 . 2 – 7 . 5 + 2 . p = 5.

Logo, 12 - 35 + 2p = 5.
Daí vem imediatamente que 2p = 28 e, portanto, p = 14.

6) Solução:
Podemos escrever: 5 $\boldsymbol{\alpha}$- 2 $\boldsymbol{\beta}$ + γ = 14. Daí, tiramos: γ = 14 - 5 α + 2 β. Portanto, a solução genérica será o terno ordenado (α,$\boldsymbol{\beta}$, 14 - 5 $\boldsymbol{\alpha}$ + 2 $\boldsymbol{\beta}$).

Observe que se arbitrando os valores para $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, a terceira variável ficará determinada em função desses valores.
Por exemplo, fazendo-se $\boldsymbol{\alpha}$ = 1, $\boldsymbol{\beta}$= 3, teremos:
γ = 14 - 5 $\boldsymbol{\alpha}$+ 2 $\boldsymbol{\beta}$ = 14 – 5 . 1 + 2 . 3 = 15,
ou seja, o terno (1, 3, 15) é solução, e assim, sucessivamente.

Verificamos, pois que existem infinitas soluções para a equação linear dada, sendo o terno ordenado ($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, 14 - 5 $\boldsymbol{\alpha}$ + 2$\boldsymbol{\beta}$) a solução genérica.

7) Solução:
Teremos, expressando x em função de m, na primeira equação:
x = (10 + my) / 2

Substituindo o valor de x na segunda equação, vem:
3[(10+my) / 2] + 5y = 8

Multiplicando ambos os membros por 2, desenvolvendo e simplificando, vem:
3(10+my) + 10y = 16
30 + 3my + 10y = 16
(3m + 10)y = -14
y = -14 / (3m + 10)

Ora, para que não exista o valor de y e, em consequência não exista o valor de x, deveremos ter o denominador igual a zero, já que , como sabemos, não existe divisão por zero.
Portanto, 3m + 10 = 0, de onde se conclui m = -10/3, para que o sistema seja impossível, ou seja, não possua solução.

8) Resposta "E".
Solução: Como os sistemas são equivalentes, eles possuem a mesma solução. Vamos resolver o sistema:
S_1: x + y = 1
x - 2y = -5

Subtraindo membro a membro, vem: x - x + y - (-2y) = 1 - (-5).
Logo, 3y = 6 \ y = 2.
Portanto, como x + y = 1, vem, substituindo: x + 2 = 1 \ x = -1.
O conjunto solução é, portanto S = {(-1, 2)}.

Como os sistemas são equivalentes, a solução acima é também solução do sistema S_2.
Logo, substituindo em S_2 os valores de x e y encontrados para o sistema S_1, vem:

a(-1) - b(2) = 5 $\rightarrow$ - a - 2b = 5
a(2) - b (-1) = -1 $\rightarrow$ 2 a + b = -1

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por 2, fica:
-2 a - 4b = 10
Somando membro a membro esta equação obtida com a segunda equação, fica:
-3b = 9 \ b = - 3
Substituindo o valor encontrado para b na equação em vermelho acima (poderia ser também na outra equação em azul), teremos:

2 a + (-3) = -1 \ a = 1.
Portanto, $a^2 + b^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$.

9) Resposta “S = {(5, 2, 4)}”.
Solução: Teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 120$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 96$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 48$$

Portanto, pela regra de Cramer, teremos:
$x_1 = D x_1 / D = 120 / 24 = 5$
$x_2 = D x_2 / D = 48 / 24 = 2$
$x_3 = D x_3 / D = 96 / 24 = 4$
Logo, o conjunto solução do sistema dado é S = {(5, 2, 4)}.
10) Solução:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 11$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_1 = 33$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_2 = -11$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Resposta: S={(3,-1)}

Matriz

A tabela seguinte mostra a situação das equipes no Campeonato Paulista de Basquete masculino.

Campeonato Paulista – Classificação		
	Time	**Pontos**
1º	Tilibra/Copimax/Bauru	20
2º	COC/Ribeirão Preto	20
3º	Unimed/Franca	19
4º	Hebraica/Blue Life	17
5º	Uniara/Fundesport	16
6º	Pinheiros	16
7º	São Caetano	16
8º	Rio Pardo/Sadia	15
9º	Valtra/UBC	14
10º	Unisanta	14
11º	Leitor/Casa Branca	14
12º	Palmeiras	13
13º	Santo André	13
14º	Corinthians	12
15º	São José	12

Fonte: FPB (Federação Paulista de Basquete)
Folha de S. Paulo – 23/10/01

Observando a tabela, podemos tirar conclusões por meio de comparações das informações apresentadas, por exemplo:
→ COC/Ribeirão lidera a classificação com 20 pontos juntamente com Tilibra/Bauru
→ Essa informação encontra-se na 2ª linha e 3ª coluna.

Definições

Chamamos de matriz m x n ($m \in N^*$ e $n \in N^*$) qualquer tabela formada por m · n elementos (informações) dispostos em m linhas e n colunas

Exemplos

1°)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ **é uma matriz 2 x 4**

2º)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$ **é uma matriz 3 x 3**

3º)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ **é uma matriz 1 x 3**

4º)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ **é uma matriz 2 x 1**

O nome de uma matriz é dado utilizando letras maiúsculas do alfabeto latino, A, por exemplo, enquanto os elementos da matriz são indicados por letras latinas minúsculas, a mesma do nome de matriz, afetadas por dois índices, que indicam a linha e a coluna que o elemento ocupa na matriz.

Assim, um elemento genérico da matriz A é representado por *aij*.

O primeiro índice, i, indica a linha que esse elemento ocupa na matriz, e o segundo índice, j, a coluna desse comando.

$$A = \left[a_{ij} \right] \leftarrow i - ésima \cdot linha$$

$$\uparrow$$

$$j - ésima \cdot coluna$$

Exemplo

Na matriz B de ordem 2 x 3 temos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = 1$; $b_{12} = 0$; $b_{13} = 3$;
$b_{21} = 2$; $b_{22} = -1$; $b_{23} = 4$

Observação: O elemento $b_{23,}$ por exemplo, lemos assim: "b dois três"

De uma forma geral, a matriz A, de ordem m x n, é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ou com a notação abreviada: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Matrizes Especiais

Apresentamos aqui a nomenclatura de algumas matrizes especiais:

1ª. Matriz Linha

É a matriz que possui uma única linha.

Exemplos

- A = [-1, 0]
- B = [1 0 0 2]

2ª. Matriz Coluna

É a matriz que possui uma única coluna.

Exemplos

$$-A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad -B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3ª) Matriz Nula

É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos

$$1^{\circ}) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2^{\circ}) B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4ª. Matriz Quadrada

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplos

$$1^{\circ}) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$ **É a matriz quadrada de ordem 2.**

Observações: Quando uma matriz não é quadrada, ela é chamada de retangular.

Dada uma matriz quadrada de ordem n, chamamos de diagonal principal da matriz ao conjunto dos elementos que possuem índices iguais.

Exemplo

$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\}$ é a diagonal principal da matriz A.

3ª) Dada a matriz quadrada de ordem n, chamamos de diagonal secundária da matriz ao conjunto dos elementos que possuem a soma dos dois índices igual a n + 1.

Exemplo

$\{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}\}$ é a diagonal secundária da matriz A.

5ª. Matriz Diagonal

É a matriz quadrada que apresenta todos os elementos, não pertencentes à diagonal principal, iguais a zero.

Exemplos

$$1^{\circ}) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6ª) Matriz Identidade

É a matriz diagonal que apresenta todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

Representamos a matriz identidade de ordem n por $\mathbf{I_n}$.

Exemplos

$$1^{\circ})I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2^{\circ})I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: Para uma matriz identidade $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$

7ª. Matriz Transposta

Dada uma matriz A, chamamos de matriz transposta de A à matriz obtida de A trocando-se "ordenadamente", suas linhas por colunas. Indicamos a matriz transposta de A por A^t.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, então \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Observação: Se uma matriz A é de ordem m x n, a matriz A^t, transposta de A, é de ordem n x m.

Igualdade de Matrizes

Sendo A e B duas matriz de mesma ordem, dizemos que um elemento de matriz A é correspondente a um elemento de B quando eles ocupam a mesma posição nas respectivas matrizes.

Exemplo

Sendo A e B duas matrizes de ordem 2 x 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

São elementos correspondentes de A e B, os pares:
a_{11} e b_{11}; a_{12} e b_{12}; a_{21} e b_{21}; a_{22} e b_{22}.

Definição

Duas matrizes A e B são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais.
Indica-se:
A = B
Então:
$A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$

Observações: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, dizemos que uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é **oposta de A** quando $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo *i*, $\bar{I} \le i \le m$, e todo j, $\bar{I} \le j \le n$.

Indicamos que B = -A.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

- Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é **simétrica** quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, $\bar{I} \le i \le m$, e todo j, $\bar{I} \le j \le n$. Isto é, $A = A^t$.
- Dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é **anti-simétrica** quando $a_{ij} = -a_{ij}$ para todo i, $\bar{I} \le i \le m$, e todo j, $\bar{I} \le j \le n$. Isto é, A é **anti-simétrica** quando $A^t = -A$.

Adição e Subtração de Matrizes

Definição

Dadas duas matrizes A e B, de mesma ordem *m x n*, denominamos soma da matriz A com a matriz B à matriz C, de ordem m x n, cujos elementos são obtidos quando somamos os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indicamos:

C = A + B

Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Adição

Sendo A, B e C matrizes m x n e O a matriz nula m s n, valem as seguintes propriedades.
- A + B = B + A (comutativa)
- (A + B) + C = A + (B + C) (associativa)
- A + O = O + A = A (elemento neutro)
- A + (-A) = (-A) + A = O (elemento oposto)
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

Definição

Consideremos duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem m x n. Chamamos de diferença entre A e B (indicamos com A – B) a soma de A com a oposta de B.

A – B = A + (B)

Exemplo

Sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

A - B =

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação: Na prática, para obtermos a subtração de matrizes de mesma ordem, basta subtrairmos os elementos correspondentes.

Multiplicação de Matrizes por um Número Real

Definição

Consideremos uma matriz A, de ordem m x n, e um número real. O produto de por A é uma matriz B, de ordem m x n, obtida quando multiplicamos cada elemento de A por.

Indicamos:

$$B = \alpha \ . \ A$$

Exemplo

Sendo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, temos

$$2 \ . \ A = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.3 \\ 2.2 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Matrizes – Produtos

Multiplicação de Matrizes

O produto (linha por coluna) de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times p}$ por uma matriz $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é uma matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, de modo que cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B, e somando-se os produtos assim obtidos. Indicamos:

$$B = \alpha \ . \ A$$

Da definição, decorre que:

- Só existe o produto de uma matriz A por uma matriz B se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
- A matriz C, produto de $A_{m \times p}$ por $B_{p \times n}$, é do tipo m x n.

Propriedades

Sendo A uma matriz de ordem m x n, B e C matrizes convenientes e, são válidas as seguintes propriedades.

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa)
- $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ (distributiva pela esquerda)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B$ (distributiva pela direita)
- $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ (elemento neutro)
- $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = . (A \cdot B)$
- $A \cdot O_{n \times p} = O_{m \times p}$ e $O_{p \times m} \cdot A = O_{p \times n}$
- $(A \cdot B)^t = B^t . A^t$

Observação: Para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa ($A \cdot B \neq B \cdot A$). Esta propriedade só é verdadeira em situações especiais, quando dizemos que as matrizes são comutáveis.

Devemos levar em consideração os fatos seguintes:

1º) $(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$, pois $(A + B)^2 = (A + B)(A+B) + A^2 + AB + BA + B^2$

2º) $(A \cdot B)^t \neq A^t \cdot B^t$, pois, pela 7ª propriedade, devemos ter $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Matriz Inversa

No conjunto dos números reais, para todo $a \neq 0$, existe um número b, denominado inverso de a, satisfazendo a condição:

$$a.b=b.a=1$$

Normalmente indicamos o inverso de a por $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Analogamente para as matrizes temos o seguinte:

Definição

Uma matriz A, quadrada de ordem n, diz-se **inversível** se, e somente se, existir uma matriz B, quadrada de ordem n, tal que:

$A.B=B.A=I_n$

A matriz B é denominada inversa de A e indicada por A^{-1}.

Exemplos

- Verifique que a matriz $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução

$$A.B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A.B=B.A=1_2$, a matriz B é a inversa de A, isto é, $B=A^{-1}$.

Observação: É bom observarmos que, de acordo com a definição, a matriz A também é a inversa de B, isto é, $A=B^{-1}$, ou seja, $A=(A^{-1})^{-1}$.

- Encontre a matriz inversa da matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, se existir.

Resolução

Supondo que $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de A, temos:

$$A.B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, encontramos:

$A=1, b=-1, c=-2$ e $d=3$

Assim, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Por outro lado:

$B.A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz:

$B=A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Observação: Quando uma matriz é inversível, dizemos que ela é uma matriz não-singular; caso a matriz não seja inversível, dizemos que ela é uma matriz singular.

Propriedades

Sendo A e B matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, temos as seguintes propriedades:

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- $(A^{-1})^{t}=A^{t})^{-1}$
- $(A.B)^{-1}=B^{-1}..A^{-1}$
- Dada A, se existir A^{-1}, então A^{-1} é única.

Exemplo

Sendo A, B e X matrizes inversíveis de ordem n, isolar X em $(X.A)^{-1}=B$.

Resolução

$(X.A)^{-1}=B \Rightarrow A^{-1}.X^{-1}=B$

Multiplicando os dois membros à esquerda por A, encontramos:

$A.A^{-1}.X^{-1}=A.B$

Como $A.A^{-1}=I_n$, então:

$I_n.X^{-1}=A.B$

Como I_n é elemento neutro na multiplicação de matrizes, temos:

$X^{-1}=A.B$

Elevando os dois membros da igualdade, ao expoente -1, temos:

$(X^{-1})^{-1}=(A.B)^{-1}$

Assim, $X=(A.B)^{-1}$, ou então $X=B^{-1}.A^{-1}$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º

Determinantes

Chamamos de determinante a teoria desenvolvida por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, como Leibniz e Seki Shinsuke Kowa, que procuravam uma fórmula para determinar as soluções de um "Sistema linear", assunto que estudaremos a seguir.

Esta teoria consiste em associar a cada matriz quadrada A, um único número real que denominamos **determinante de** $\boldsymbol{A}$ e que indicamos por **det** $\boldsymbol{A}$ ou colocamos os elementos da matriz A entre duas barras verticais, como no exemplo abaixo:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

Definições

Determinante de uma Matriz de Ordem 1

Seja a matriz quadrada de ordem 1: $A=[a_{11}]$

Chamamos **determinante** dessa matriz o número:

$\det A=[a_{11}]=a_{11}$

Exemplos

1º) $A=[-2] \rightarrow \det A=-2$

2º) $B=[5] \rightarrow \det B=5$

3º) $C=[0] \rightarrow \det C=0$

Determinante de uma Matriz de ordem 2

Seja a matriz quadrada de ordem 2:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Chamamos de **determinante** dessa matriz o número:

$$\det A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}\ .\ a_{22}-a_{21}\ .\ a_{12}$$

Para facilitar a memorização desse número, podemos dizer que o determinante é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Esquematicamente:

$$\det A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}\ .\ a_{22}-a_{21}\ .\ a_{12}$$

Exemplos

- $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$\det A=1.3-5.2=-7$

- $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

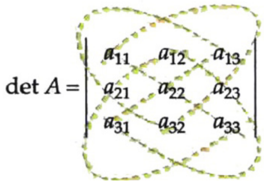
$\det B=2.3-2.(-1)=8$

Determinante de uma Matriz de Ordem 3

Seja a matriz quadrada de ordem 3:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Chamamos determinante dessa matriz o numero:



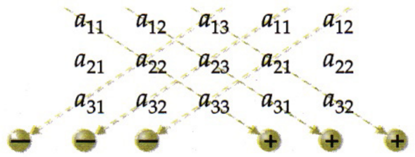
det$A$= $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$+ $a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$+$a_{32}\ a_{21}\ a_{13}$-$a_{31}\ a_{22}\ a_{13}$+
-$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$-$a_{32}\ a_{23}\ a_{11}$

Para memorizarmos a definição de determinante de ordem 3, usamos a regra prática denominada **Regra de Sarrus:**

1º) Repetimos a 1º e a 2º colunas às direita da matriz.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º) Multiplicando os termos entre si, seguindo os traços em diagonal e associando o sinal indicado dos produtos, temos:



det$A$= $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$+ $a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$+$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$-$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$+
-$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$-$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$

Observação: A regra de Sarrus também pode ser utilizada repetindo a 1º e 2º linhas, ao invés de repetirmos a 1º e 2º colunas.

Determinantes – Propriedades - I

Apresentamos, a seguir, algumas propriedades que visam a simplificar o cálculo dos determinantes:

Propriedade 1: O determinante de uma matriz A é igual ao de sua transposta A^t.

Exemplo

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \det A = d \quad -b \\ \det A^t = d \quad -b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \det A^t = \det A$$

Propriedade 2: Se B é a matriz que se obtém de uma matriz quadrada A, quando trocamos entre si a posição de duas filas paralelas**,** então:

det$B$ = -det$A$

Exemplo

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

B foi obtida trocando-se a 1º pela 2º linha de A.

det$A$=ad-bc

det$B$=BC-ad=-(ad-bc)=-det$A$

Assim,

det$B$=-det$A$

Consequência da Propriedade 2: Uma matriz A que possui duas filas paralelas "iguais"tem determinante igual a zero.

Justificativa: A matriz que obtemos de A, quando trocamos entre si as duas filas (linha ou coluna "iguais", é igual a A. Assim, de acordo com a propriedade 2, escrevemos que det$A$ = -det$A$

Assim: det$A$ = 0

Propriedade 3: Sendo B uma matriz que obtemos de uma matriz quadrada A, quando multiplicamos uma de sua filas (linha ou coluna) por uma constante k, então det$B$ = k.det$A$

Consequência da Propriedade 3: Ao calcularmos um determinante, podemos "colocar em evidência"um "fator comum" de uma fila (linha ou coluna).

Exemplo

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, a matriz k. A é obtida multiplicando todos os elementos de A por k, então:

det($k.A$)=k^n.det$A$

Exemplo

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow k.A=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

$$\det(k.A)=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix} = k.k.k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Assim:

det(k.A)=k^3.det$A$

Propriedade 4: Se A, B e C são matrizes quadradas de mesma ordem, tais que os elementos correspondentes de A, B e C são iguais entre si, exceto os de uma fila, em que os elementos de C são iguais às somas dos seus elementos correspondentes de A e B, então.

det$C$ = det$A$ + det$B$

Exemplos:

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ e & f & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ e & f & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & x+r \\ c & d & y+s \\ e & f & z+t \end{vmatrix}$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedades 5 (Teorema de Jacobi)
O determinante não se altera, quando adicionamos uma fila qualquer com outra fila paralela multiplicada por um número.

Exemplo

Exemplo
Considere o determinante $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Somando a 3ª coluna com a 1ª multiplicada por m, teremos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} \underset{=}{(P4)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & ma \\ d & e & md \\ g & h & mg \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} = \det A + m \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}$$

Igual a zero

$$\begin{vmatrix} a & b & c+ma \\ d & e & f+md \\ g & h & i+mg \end{vmatrix} = \det A$$

Exemplo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

D=8+0+0-60-0-0=-52

Em seguida, vamos multiplicar a 1ª coluna por 2, somar com a 3ª coluna e calcular:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \\ 5 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 12 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

D_1=48+0+0-100-0-0=-52

Observe que $D_1 = D$, de acordo com a propriedade.

Consequência
Quando uma fila de um determinante é igual à soma de múltiplos de filas paralelas (combinação linear de filas paralelas), o determinante é igual a zero.

Exemplo

$$Seja\,D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & -1 & 05 \end{vmatrix}$$

Observe que cada elemento de 3ª coluna é igual à 1ª coluna multiplicada por 2 somada com a 2ª coluna multiplicada por 3.

8 = 2(1) + 3(2) = 2 + 6
12 = 2(3) + 3(2) = 6 + 6
5 = 2(4) + 3(-1) = 8 - 3
Portanto, pela consequência da propriedade 5, $D = 0$
Use a regra de Sarrus e verifique.

Propriedade 6 (Teorema de Binet)
Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem, então:
$\det(A.B) = \det A \,.\, \det B$

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 3$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -2$

$A.B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A.B) = -6$

Logo, $\det(AB) = \det A.\ \det B$

Consequências: Sendo A uma matriz quadrada e $n \in N^*$, temos:
$\det(A^n) = (\det A)^n$
Sendo A uma matriz inversível, temos:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Justificativa: Seja A matriz inversível.
$A^{-1}.A = I$
$\det(A^{-1}.A) = \det I$
$\det A^{-1}.\det A = \det I$

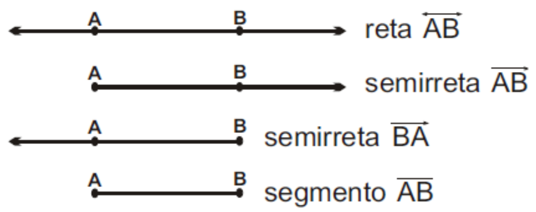
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Uma vez que det I=1, onde i é a matriz identidade.

1.7 GEOMETRIA PLANA: CÁLCULO DE ÁREAS, SEMELHANÇA, RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E NO CÍRCULO.

A Geometria é a parte da matemática que estuda as figuras e suas propriedades. A geometria estuda figuras abstratas, de uma perfeição não existente na realidade. Apesar disso, podemos ter uma boa ideia das figuras geométricas, observando objetos reais, como o aro da cesta de basquete que sugere uma circunferência, as portas e janelas que sugerem retângulos e o dado que sugere um cubo.

Reta, semirreta e segmento de reta



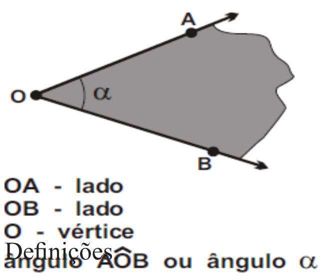
Definições.

a) Segmentos congruentes.
Dois segmentos são congruentes se têm a mesma medida.

b) Ponto médio de um segmento.
Um ponto P é ponto médio do segmento AB se pertence ao segmento e divide AB em dois segmentos congruentes.

c) Mediatriz de um segmento.
É a reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio

Ângulo



Definições:

a) Ângulo é a região plana limitada por duas semirretas de mesma origem.

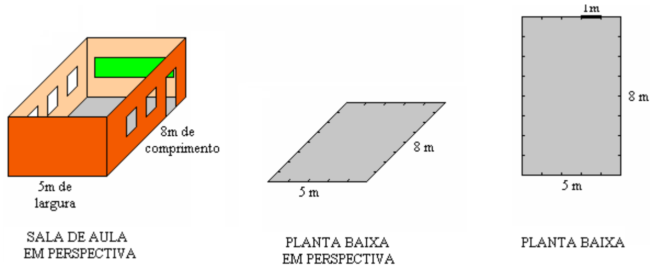
b) Ângulos congruentes: Dois ângulos são ditos congruentes se têm a mesma medida.

c) Bissetriz de um ângulo: É a semirreta de origem no vértice do ângulo que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes.

Perímetro: entendendo o que é perímetro.

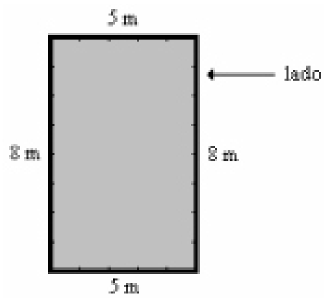
Imagine uma sala de aula de 5m de largura por 8m de comprimento.

Quantos metros lineares serão necessários para colocar rodapé nesta sala, sabendo que a porta mede 1m de largura e que nela não se coloca rodapé?



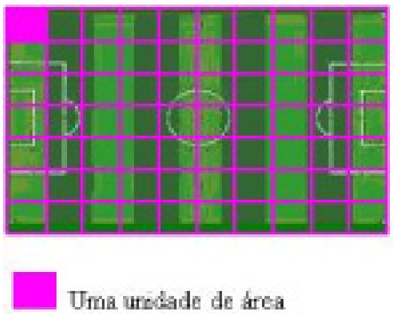
A conta que faríamos seria somar todos os lados da sala, menos 1m da largura da porta, ou seja:

$P = (5 + 5 + 8 + 8) – 1$
$P = 26 – 1$
$P = 25$



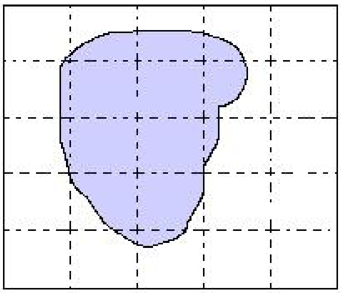
Colocaríamos 25m de rodapé.
A soma de todos os lados da planta baixa se chama Perímetro.
Portanto, Perímetro é a soma dos lados de uma figura plana.

Área
Área é a medida de uma superfície.
A área do campo de futebol é a medida de sua superfície (gramado).
Se pegarmos outro campo de futebol e colocarmos em uma malha quadriculada, a sua área será equivalente à quantidade de quadradinho. Se cada quadrado for uma unidade de área:



Veremos que a área do campo de futebol é 70 unidades de área. A unidade de medida da área é: m² (metros quadrados), cm² (centímetros quadrados), e outros.

Se tivermos uma figura do tipo:

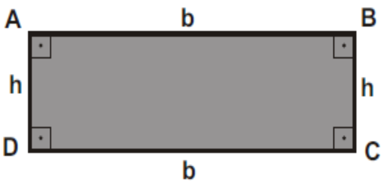


Sua área será um valor aproximado. Cada ▢ é uma unidade, então a área aproximada dessa figura será de 4 unidades.

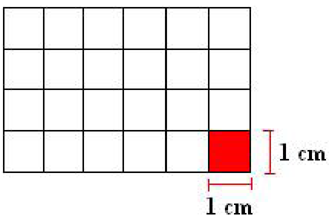
No estudo da matemática calculamos áreas de figuras planas e para cada figura há uma fórmula pra calcular a sua área.

Retângulo

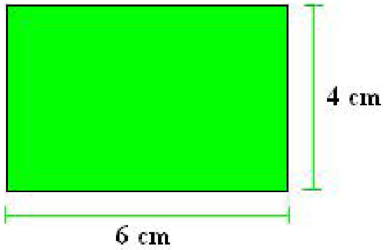
É o quadrilátero que tem todos os ângulos internos congruentes e iguais a 90º.



No cálculo da área de qualquer retângulo podemos seguir o raciocínio:



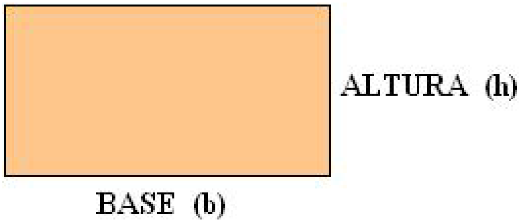
Pegamos um retângulo e colocamos em uma malha quadriculada onde cada quadrado tem dimensões de 1 cm. Se contarmos, veremos que há 24 quadrados de 1 cm de dimensões no retângulo. Como sabemos que a área é a medida da superfície de uma figuras podemos dizer que 24 quadrados de 1 cm de dimensões é a área do retângulo.



O retângulo acima tem as mesmas dimensões que o outro, só que representado de forma diferente. O cálculo da área do retângulo pode ficar também da seguinte forma:

$A = 6 . 4$ $\qquad$ $A = 24$ cm²

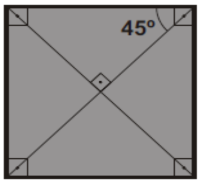
Podemos concluir que a área de qualquer retângulo é:



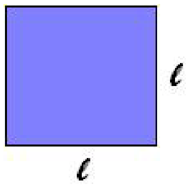
$A = b . h$

Quadrado

É o quadrilátero que tem os lados congruentes e todos os ângulos internos a congruentes (90º).



Sua área também é calculada com o produto da base pela altura. Mas podemos resumir essa fórmula:



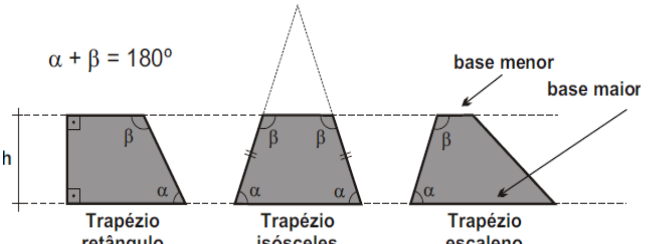
Como todos os lados são iguais, podemos dizer que base é igual a e a altura igual a , então, substituindo na fórmula A = b . h, temos:

$A = \ell . \ell$

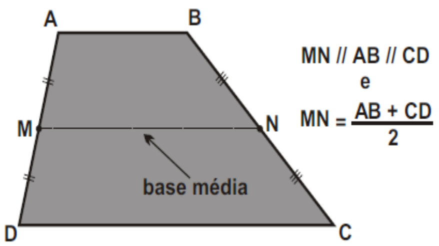
$A = \ell^2$

Trapézio

É o quadrilátero que tem dois lados paralelos. A altura de um trapézio é a distância entre as retas suporte de suas bases.



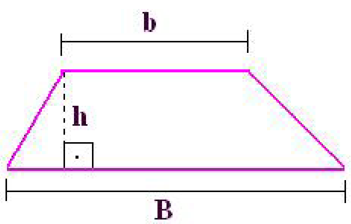
Em todo trapézio, o segmento que une os pontos médios dos dois lados não paralelos, é paralelo às bases e vale a média aritmética dessas bases.



A área do trapézio está relacionada com a área do triângulo que é calculada utilizando a seguinte fórmula:

$A = \frac{b . h}{2}$ (b = base e h = altura).

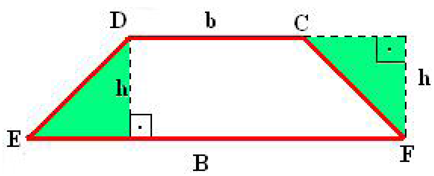
Observe o desenho de um trapézio e os seus elementos mais importantes (elementos utilizados no cálculo da sua área):



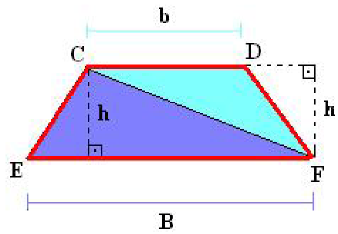
Um trapézio é formado por uma base maior (B), por uma base menor (b) e por uma altura (h).

Para fazermos o cálculo da área do trapézio é preciso dividi-lo em dois triângulos, veja como:

Primeiro: completamos as alturas no trapézio:



Segundo: o dividimos em dois triângulos:



A área desse trapézio pode ser calculada somando as áreas dos dois triângulos (ΔCFD e ΔCEF).

Antes de fazer o cálculo da área de cada triângulo separadamente observamos que eles possuem bases diferentes e alturas iguais.

Cálculo da área do ΔCEF:

$$A\Delta 1 = \frac{B . h}{2}$$

Cálculo da área do ΔCFD:

$$A\Delta 2 = \frac{b . h}{2}$$

Somando as duas áreas encontradas, teremos o cálculo da área de um trapézio qualquer:

$$AT = A\Delta 1 + A\Delta 2$$

$$AT = \frac{B . h}{2} + \frac{b . h}{2}$$

$AT = \frac{B . h + b . h}{2} \rightarrow$ colocar a altura (h) em evidência, pois é um termo comum aos dois fatores.

$$AT = \frac{h\,(B + b)}{2}$$

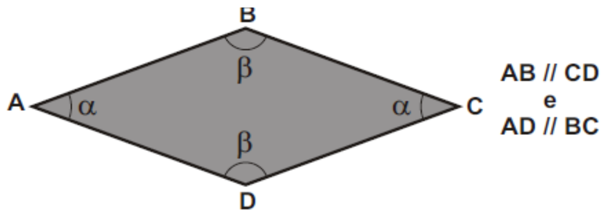
Portanto, no cálculo da área de um trapézio qualquer utilizamos a seguinte fórmula:

$$A = \frac{h\,(B + b)}{2}$$

h = altura
B = base maior do trapézio
b = base menor do trapézio

Losango

É o quadrilátero que tem os lados congruentes.



Em todo losango as diagonais são:

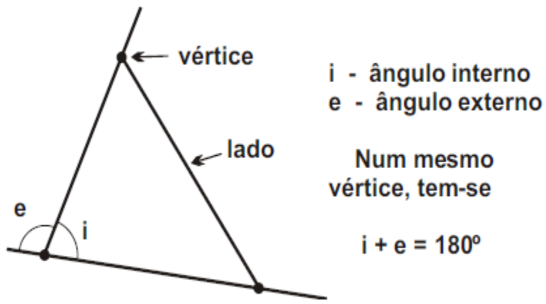
a) perpendiculares entre si;

b) bissetrizes dos ângulos internos.

A área do losango é definida pela seguinte fórmula: $S = \dfrac{d.D}{2}$ Onde D é a diagonal maior e d é a menor.

Triângulo

Figura geométrica plana com três lados.



Ângulo externo. O ângulo externo de qualquer polígono convexo é o ângulo formado entre um lado e o prolongamento do outro lado.

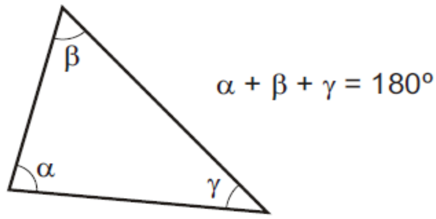
Classificação dos triângulos.

a) quanto aos lados:
- triângulo equilátero.
- triângulo isósceles.
- triângulo escaleno.

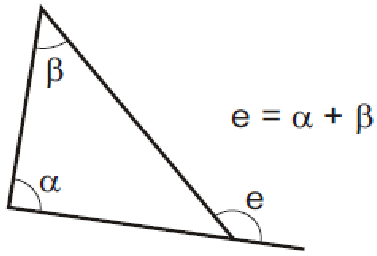
b) quanto aos ângulos:
- triângulo retângulo.
- triângulo obtusângulo.
- triângulo acutângulo.

Propriedades dos triângulos

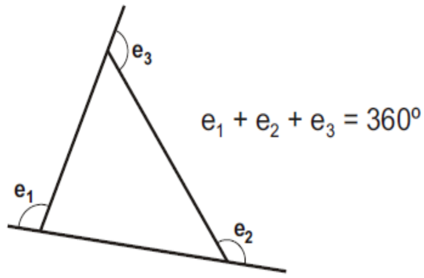
1) Em todo triângulo, a soma das medidas dos 3 ângulos internos é 180º.



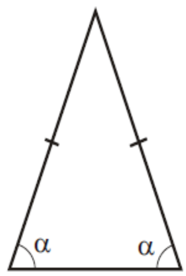
2) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos 2 ângulos internos não adjacentes.



3) Em todo triângulo, a soma das medidas dos 3 ângulos externos é 360º.

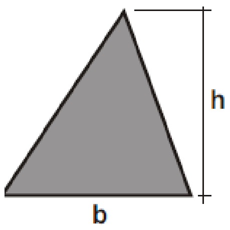


4) Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes. Observação - A base de um triângulo isósceles é o seu lado diferente.



Altura - É a distância entre o vértice e a reta suporte do lado oposto.

Área do triangulo

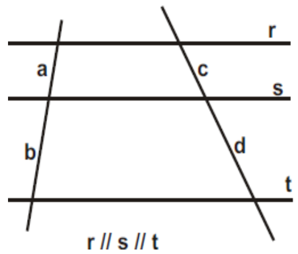


$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

Segmentos proporcionais

Teorema de Tales.

Em todo feixe de retas paralelas, cortado por uma reta transversal, a razão entre dois segmento quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.



Teorema de Tales

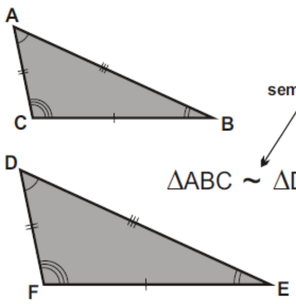
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Semelhança de triângulos

Definição.
Dois triângulos são semelhantes se têm os ângulos dois a dois congruentes e os lados correspondentes dois a dois proporcionais.

Definição mais "popular".
Dois triângulos são semelhantes se um deles é a redução ou a ampliação do outro.

Importante - Se dois triângulos são semelhantes, a proporcionalidade se mantém constante para quaisquer dois segmentos correspondentes, tais como: lados, medianas, alturas, raios das circunferências inscritas, raios das circunferências circunscritas, perímetros, etc.



semelhante

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Longrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{F} \\ \text{e} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k \end{cases}$$

K - razão da semelhança ou constante de proporcionalidade.

Exercícios

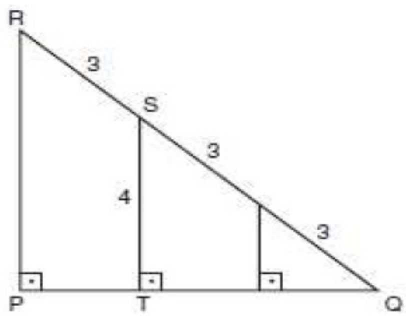
1. Seja um paralelogramo com as medidas da base e da altura respectivamente, indicadas por b e h. Se construirmos um outro paralelogramo que tem o dobro da base e o dobro da altura do outro paralelogramo, qual será relação entre as áreas dos paralelogramos?

2. Os lados de um triângulo equilátero medem 5 mm. Qual é a área deste triângulo equilátero?

3. Qual é a medida da área de um paralelogramo cujas medidas da altura e da base são respectivamente 10 cm e 2 dm?

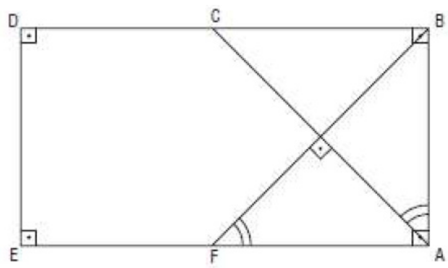
4. As diagonais de um losango medem 10 cm e 15 cm. Qual é a medida da sua superfície?

5. Considerando as informações constantes no triangulo PQR, pode-se concluir que a altura PR desse triângulo mede:



a)5 b)6 c)7 d)8

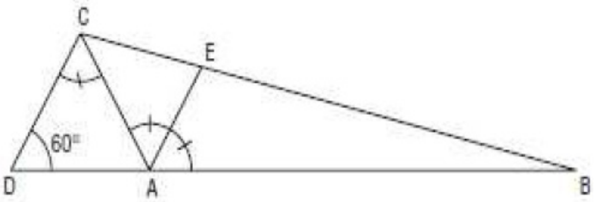
6. Num cartão retangular, cujo comprimento é igual ao dobro de sua altura, foram feitos dois vincos AC e BF, que formam, entre si, um ângulo reto (90°). Observe a figura:



Considerando AF=16cm e CB=9cm, determine:
a) as dimensões do cartão;
b) o comprimento do vinco AC

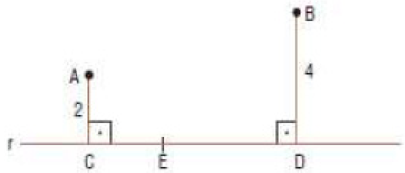
7. Na figura, os ângulos assinalados sao iguais, AC=2 e AB=6. A medida de AE é:

a)6/5 b)7/4 c)9/5 d)3/2 e)5/4



8. Na figura a seguir, as distâncias dos pontos A e B à reta valem 2 e 4. As projeções ortogonais de A e B sobre essa reta são os pontos C e D. Se a medida de CD é 9, a que distância de C deverá estar o ponto E, do segmento CD, para que CÊA=DÊB

a)3
b)4
c)5
d)6
e)7

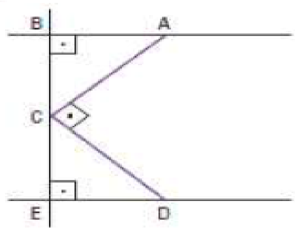


9. Para ladrilhar uma sala são necessários exatamente 400 peças iguais de cerâmica na forma de um quadrado. Sabendo-se que a área da sala tem 36m², determine:

a) a área de cada peça, em m².
b) o perímetro de cada peça, em metros.

10. Na figura, os ângulos ABC, ACD, CÊD, são retos. Se AB=2$\sqrt{3}$ m e CE=$\sqrt{3}$ m, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e CDE é:

a)6
b)4
c)3
d)2
e)$\sqrt{3}$



Respostas

1. A2 = (2b)(2h) = 4bh = 4A1

2. Segundo o enunciado temos:
l=5mm

Substituindo na fórmula:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3} \Rightarrow S = 10,8$$

3. Sabemos que 2 dm equivalem a 20 cm, temos:
h=10
b=20

Substituindo na fórmula:

$$S = b.h = 20.10 = 200cm^2 = 2dm^2$$

4. Para o cálculo da superfície utilizaremos a fórmula que envolve as diagonais, cujos valores temos abaixo:

d1=10
d2=15

Utilizando na fórmula temos:

$$S = \frac{d1.d2}{2} \Rightarrow \frac{10.15}{2} = 75cm^2$$

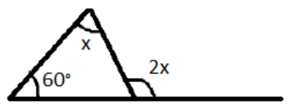
5. $\frac{4}{\overline{PR}} = \frac{6}{9} \Rightarrow \overline{PR} = \frac{36}{6} = 6$

6. $\frac{x}{16} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

$a) x = 12(altura); 2x = 24(comprimento)$

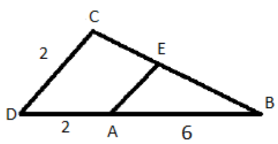
$b) \overline{AC} = \sqrt{9^2 + x^2} = \sqrt{81+144} = 15$

7.



3) 2x=x+60 ⇒

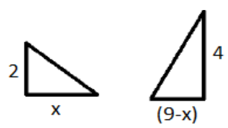
$x = 60$ (Triângulo Equilátero)



$$\frac{2}{2+6} = \frac{\overline{AE}}{6} \Rightarrow 12 = 8 * \overline{AE} \Rightarrow$$

$$\overline{AE} = 12/8 = 6/4 = 3/2$$

8.



2/4=x/(9-x)
18-2x=4x
6x=18
x=3

9.

$36m^2 \rightarrow 400$

$x \rightarrow 1$

$a) x = 36/400 = 9/100 = 0{,}09m^2$

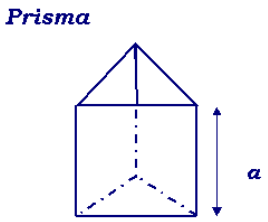
$b) c = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3m$

10.
$$\frac{2\sqrt{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{b}$$
$$a=2b$$
$$\frac{2\sqrt{3}\times a}{2}\div\frac{\sqrt{3}\times b}{2}=\frac{2a}{b}$$
$$\frac{2(2b)}{b}=4$$

1.8 GEOMETRIA ESPACIAL: ÁREAS E VOLUMES DE PRISMAS E PIRÂMIDES.

Sólidos Geométricos

Para explicar o cálculo do volume de figuras geométricas, podemos pedir que visualizem a seguinte figura:



a) *A figura representa a planificação de um prisma reto;*

b) O volume de um prisma reto é igual ao produto da área da base pela altura do sólido, isto é

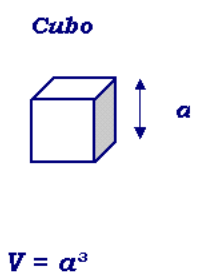
V = Ab x a

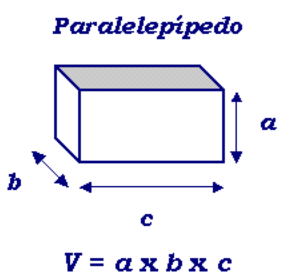
c) O cubo e o paralelepípedo retângulo são prismas;

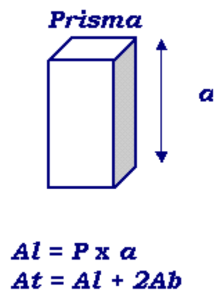
d) O volume do cilindro também se pode calcular da mesma forma que o volume de um prisma reto.

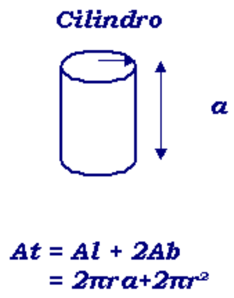
Os formulários seguintes, das figuras geométricas são para calcular da mesma forma que as acima apresentadas:

Figuras Geométricas:

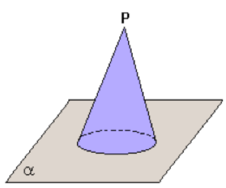


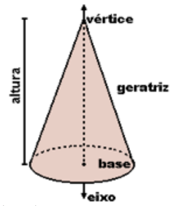






O conceito de cone





Considere uma região plana limitada por uma curva suave (sem quinas), fechada e um ponto P fora desse plano. Chamamos de cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer da região.

Elementos do cone

- Base: A base do cone é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.

- Vértice: O vértice do cone é o ponto P.

- Eixo: Quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.

- Geratriz: Qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.

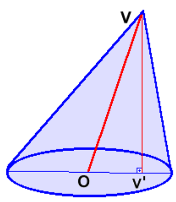
- Altura: Distância do vértice do cone ao plano da base.

- Superfície lateral: A superfície lateral do cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.

- Superfície do cone: A superfície do cone é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.

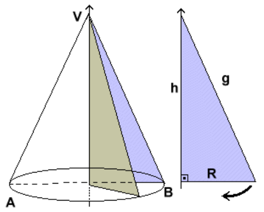
- Seção meridiana: A seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

Classificação do cone



Quando observamos a posição relativa do eixo em relação à base, os cones podem ser classificados como retos ou oblíquos. Um cone é dito **reto** quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é **oblíquo** quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.

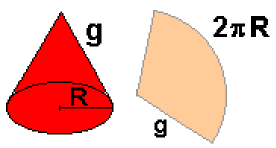
Observação: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones retos. Em função das bases, os cones recebem nomes especiais. Por exemplo, um cone é dito circular se a base é um círculo e é dito elíptico se a base é uma região elíptica.



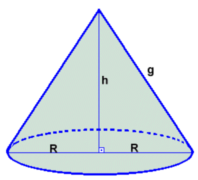
Observações sobre um cone circular reto

1. Um cone circular reto é chamado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos
2. A seção meridiana do cone circular reto é a interseção do cone com um plano que contem o eixo do cone. No caso acima, a seção meridiana é a região triangular limitada pelo triângulo isósceles VAB.
3. Em um cone circular reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Se g é a medida de cada geratriz então, pelo Teorema de Pitágoras, temos: $g^2 = h^2 + R^2$
4. A **Área Lateral** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):$A_{Lat} = \text{Pi } R\, g$
5. A **Área total** de um cone circular reto pode ser obtida em função de g (medida da geratriz) e R (raio da base do cone):

$A_{Total} = \text{Pi } R\, g + \text{Pi } R^2$



Cones Equiláteros



Um cone circular reto é um cone equilátero se a sua seção meridiana é uma região triangular equilátera e neste caso a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro da base.

A área da base do cone é dada por:

$A_{Base} = \text{Pi } R^2$

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$(2R)^2 = h^2 + R^2$

$h^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

Assim:

$h = R\sqrt{3}$

Como o volume do cone é obtido por 1/3 do produto da área da base pela altura, então:

$V = (1/3)\text{ Pi } \sqrt{3} R^3$

Como a área lateral pode ser obtida por:

$A_{Lat} = \text{Pi } R\, g = \text{Pi } R\, 2R = 2 \text{ Pi } R^2$

então a área total será dada por:

$A_{Total} = 3 \text{ Pi } R^2$

O conceito de esfera

A esfera no espaço R^3 é uma superfície muito importante em função de suas aplicações a problemas da vida. Do ponto de vista matemático, a esfera no espaço R^3 é confundida com o sólido geométrico (disco esférico) envolvido pela mesma, razão pela quais muitas pessoas calculam o *volume* da esfera. Na maioria dos livros elementares sobre Geometria, a esfera é tratada como se fosse um sólido, herança da Geometria Euclidiana.

Embora não seja correto, muitas vezes necessitamos falar palavras que sejam entendidas pela coletividade. De um ponto de vista mais cuidadoso, a esfera no espaço R^3 é um objeto matemático parametrizado por duas dimensões, o que significa que podemos obter medidas de área e de comprimento, mas o volume tem medida nula. Há outras esferas, cada uma definida no seu respectivo espaço n-dimensional. Um caso interessante é a esfera na reta unidimensional:

$S^o = \{x \text{ em } R: x^2=1\} = \{+1,-1\}$

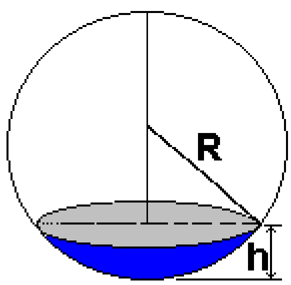
Por exemplo, a esfera

$S^1 = \{ (x,y) \text{ em } R^2: x^2 + y^2 = 1 \}$

é conhecida por nós como uma circunferência de raio unitário centrada na origem do plano cartesiano.

Aplicação: volumes de líquidos

Um problema fundamental para empresas que armazenam líquidos em tanques esféricos, cilíndricos ou esféricos e cilíndricos é a necessidade de realizar cálculos de volumes de regiões esféricas a partir do conhecimento da altura do líquido colocado na mesma. Por exemplo, quando um tanque é esférico, ele possui um orifício na parte superior (pólo Norte) por onde é introduzida verticalmente uma vara com indicadores de medidas. Ao retirar a vara, observa-se o nível de líquido que fica impregnado na vara e esta medida corresponde à altura de líquido contido na região esférica. Este não é um problema trivial, como observaremos pelos cálculos realizados na sequência.



A seguir apresentaremos elementos esféricos básicos e algumas fórmulas para cálculos de áreas na esfera e volumes em um sólido esférico.

A superfície esférica

A esfera no espaço R^3 é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados a uma mesma distância denominada raio de um ponto fixo chamado centro.

Uma notação para a esfera com raio unitário centrada na origem de R^3 é:

$S^2 = \{ (x,y,z) \text{ em } R^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

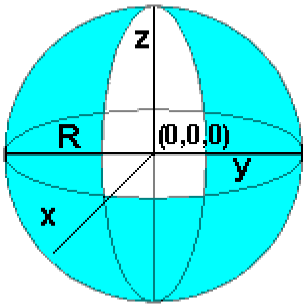
Uma esfera de raio unitário centrada na origem de R^4 é dada por:

$S^3 = \{ (w,x,y,z) \text{ em } R^4: w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

Você conseguiria imaginar espacialmente tal esfera?

Do ponto de vista prático, a esfera pode ser pensada como a película fina que envolve um sólido esférico. Em uma melancia esférica, a esfera poderia ser considerada a película verde (casca) que envolve a fruta.

É comum encontrarmos na literatura básica a definição de esfera como sendo o sólido esférico, no entanto não se devem confundir estes conceitos. Se houver interesse em aprofundar os estudos desses detalhes, deve-se tomar algum bom livro de Geometria Diferencial que é a área da Matemática que trata do detalhamento de tais situações.



O disco esférico é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão localizados na casca e dentro da esfera. Do ponto de vista prático, o disco esférico pode ser pensado como a reunião da película fina que envolve o sólido esférico com a região sólida dentro da esfera. Em uma melancia esférica, o disco esférico pode ser visto como toda a fruta.

Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (0,0,0), a equação da esfera é dada por:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é:

$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

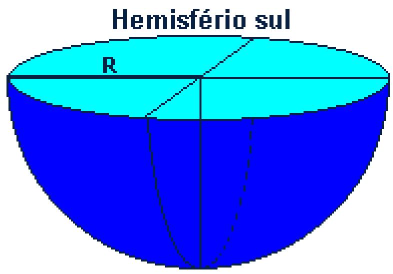
Quando indicamos o raio da esfera pela letra R e o centro da esfera pelo ponto (x_o,y_o,z_o), a equação da esfera é dada por:

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$

e a relação matemática que define o disco esférico é o conjunto que contém a casca reunido com o interior, isto é, o conjunto de todos os pontos (x,y,z) em R^3 tal que:

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 \leq R^2$

Da forma como está definida, a esfera centrada na origem pode ser construída no espaço euclidiano R^3 de modo que o centro da mesma venha a coincidir com a origem do sistema cartesiano R^3, logo podemos fazer passar os eixos OX, OY e OZ, pelo ponto (0,0,0).



Seccionando a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ com o plano z=0, obteremos duas superfícies semelhantes: o hemisfério Norte ("boca para baixo") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z é não negativa e o hemisfério Sul ("boca para cima") que é o conjunto de todos os pontos da esfera onde a cota z não é positiva.

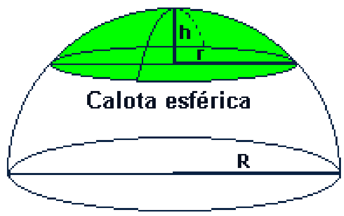
Se seccionarmos a esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ por um plano vertical que passa em (0,0,0), por exemplo, o plano x=0, teremos uma circunferência maximal C da esfera que é uma circunferência contida na esfera cuja medida do raio coincide com a medida do raio da esfera, construída no plano YZ e a equação desta circunferência será:

$x=0,\ y^2 + z^2 = R^2$

sendo que esta circunferência intersecta o eixo OZ nos pontos de coordenadas (0,0,R) e (0,0,-R). Existem infinitas circunferências maximais em uma esfera.

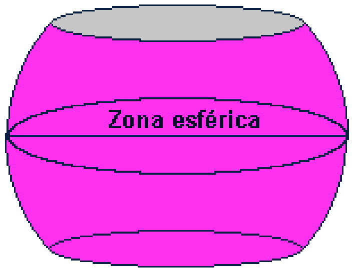
Se rodarmos esta circunferência maximal C em torno do eixo OZ, obteremos a esfera através da rotação e por este motivo, a esfera é uma superfície de revolução.

Se tomarmos um arco contido na circunferência maximal cujas extremidades são os pontos (0,0,R) e (0,p,q) tal que $p^2+q^2=R^2$ e rodarmos este arco em torno do eixo OZ, obteremos uma superfície denominada calota esférica.



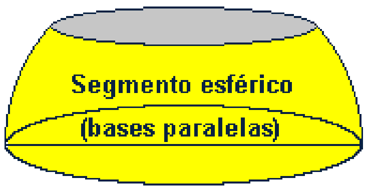
Na prática, as pessoas usam o termo calota esférica para representar tanto a superfície como o sólido geométrico envolvido pela calota esférica. Para evitar confusões, usarei "calota esférica" com aspas para o sólido e sem aspas para a superfície.

A partir da rotação, construiremos duas calotas em uma esfera, de modo que as extremidades dos arcos sejam (0,0,R) e (0,p,q) com $p^2+q^2=R^2$ no primeiro caso (calota Norte) e no segundo caso (calota Sul) as extremidades dos arcos (0,0,-R) e (0,r,-s) com $r^2+s^2=R^2$ e retirarmos estas duas calotas da esfera, teremos uma superfície de revolução denominada zona esférica.



De um ponto de vista prático, consideremos uma melancia esférica. Com uma faca, cortamos uma "calota esférica" superior e uma "calota esférica" inferior. O que sobra da melancia é uma região sólida envolvida pela zona esférica, algumas vezes denominada zona esférica.

Consideremos uma "calota esférica" com altura h_1 e raio da base r_1 e retiremos desta calota uma outra "calota esférica" com altura h_2 e raio da base r_2, de tal modo que os planos das bases de ambas sejam paralelos. A região sólida determinada pela calota maior menos a calota menor recebe o nome de segmento esférico com bases paralelas.



No que segue, usaremos esfera tanto para o sólido como para a superfície, "calota esférica" para o sólido envolvido pela calota esférica, a letra maiúscula R para entender o raio da esfera sobre a qual estamos realizando os cálculos, V será o volume, A(lateral) será a área lateral e A(total) será a área total.

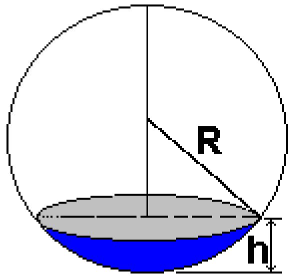
Algumas fórmulas (relações) para objetos esféricos

Objeto	Relações e fórmulas
Esfera	Volume = (4/3) Pi R^3 A(total) = 4 Pi R^2
Calota esférica (altura h, raio da base r)	R^2 = h (2R-h) A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = Pi h (4R-h) V=Pi.h^2(3R-h)/3=Pi(3R^2+h^2)/6
Segmento esférico (altura h, raios das bases r_1>r^2)	$R^2 = a^2 + [(r_1^2 - r_2^2 - h^2)/2h)]^2$ A(lateral) = 2 Pi R h A(total) = Pi(2Rh+r_1^2+r_2^2) Volume=Pi.h(3r_1^2+3r_2^2+h^2)/6

Estas fórmulas podem ser obtidas como aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, mas nós nos limitaremos a apresentar um processo matemático para a obtenção da fórmula do cálculo do volume da "calota esférica" em função da altura da mesma.

Volume de uma calota no hemisfério Sul

Consideremos a esfera centrada no ponto (0,0,R) com raio R.



A equação desta esfera será dada por:

$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$

A altura da calota será indicada pela letra h e o plano que coincide com o nível do líquido (cota) será indicado por z=h. A interseção entre a esfera e este plano é dado pela circunferência

$x^2 + y^2 = R^2 - (h-R)^2$

Obteremos o volume da calota esférica com a altura h menor ou igual ao raio R da esfera, isto é, h pertence ao intervalo [0,R] e neste caso poderemos explicitar o valor de z em função de x e y para obter:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Para simplificar as operações algébricas, usaremos a letra r para indicar:

$r^2 = R^2 - (h-R)^2 = h(2R-h)$

A região circular S de integração será descrita por $x^2+y^2 \le R^2$ ou em coordenadas polares através de:

$0 \le m \le R$, $0 \le t \le 2Pi$

A integral dupla que representa o volume da calota em função da altura h é dada por:

$$Vc(h) = \int\int_s (h - z)dxdy$$

ou seja

$$Vc(h) = \int\int_s (h - R + \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)})dxdy$$

Escrita em Coordenadas Polares, esta integral fica na forma:

$$Vc(h) = \int_{t=0}^{2x}\int_{m=0}^{R} (h - R + \sqrt{R^2 - m^2})mdmdt$$

Após realizar a integral na variável t, podemos separá-la em duas integrais:

$$Vc(h) = 2\pi\{\int_0^R (h-R)m\,dm + \int_0^R \sqrt{R^2 - m^2}\,mdm\}$$

ou seja:

$$Vc(h) = \pi\{(h-R)R^2 - \int_0^R \sqrt{R^2 - m^2}(-2m)dm\}$$

Com a mudança de variável u=R^2-m^2 e du=(-2m)dm poderemos reescrever:

$$Vc(h) = \pi\{(h-R)R^2 + \int_{u=0}^{R^2} \sqrt{u}\,du\}$$

Após alguns cálculos obtemos:

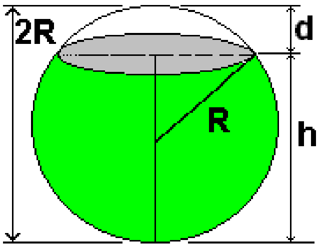
$V_C(h) = Pi (h-R) [R^2 -(h-R)^2] - (2/3)Pi[(R-h)^3 - R^3]$

e assim temos a fórmula para o cálculo do volume da calota esférica no hemisfério Sul com a altura h no intervalo [0,R], dada por:

$V_C(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

Volume de uma calota no hemisfério Norte

Se o nível do líquido mostra que a altura h já ultrapassou o raio R da região esférica, então a altura h está no intervalo [R,2R]



Lançaremos mão de uma propriedade de simetria da esfera que nos diz que o volume da calota superior assim como da calota inferior somente depende do raio R da esfera e da altura h e não da posição relativa ocupada.

Aproveitaremos o resultado do cálculo utilizado para a calota do hemisfério Sul. Tomaremos a altura tal que: h=2R-d, onde d é a altura da região que não contém o líquido. Como o volume desta calota *vazia* é dado por:

$V_C(d) = Pi\ d^2(3R-d)/3$

e como h=2R-d, então para h no intervalo [R,2R], poderemos escrever o volume da calota vazia em função de h:

$V_C(h) = Pi\ (2R-h)^2(R+h)/3$

Para obter o volume ocupado pelo líquido, em função da altura, basta tomar o volume total da região esférica e retirar o volume da calota *vazia*, para obter:

$V(h) = 4Pi\ R^3/3 - Pi\ (2R-h)^2(R+h)/3$

que pode ser simplificada para:

$V(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

Independentemente do fato que a altura h esteja no intervalo [0,R] ou [R,2R] ou de uma forma geral em [0,2R], o cálculo do volume ocupado pelo líquido é dado por:

$V(h) = Pi\ h^2(3R-h)/3$

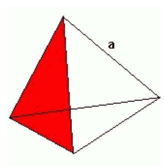
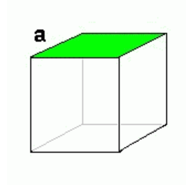
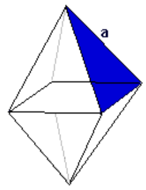
Poliedro

Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço R^3. As regiões planas que limitam este sólido são as faces do poliedro. As interseções das faces são as arestas do poliedro. As interseções das arestas são os vértices do poliedro. Cada face é uma região poligonal contendo *n* lados.

Poliedros convexos são aqueles cujos ângulos diedrais formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180 graus. Outra definição: Dados quaisquer dois pontos de um poliedro convexo, o segmento que tem esses pontos como extremidades, deverá estar inteiramente contido no poliedro.

Poliedros Regulares

Um poliedro é regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com *n* lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice.

Tetraedro	Hexaedro (cubo)	Octaedro
 	 	

Áreas e Volumes

Poliedro regular	Área	Volume
Tetraedro	a^2 R[3]	(1/12) a^3 R[2]
Hexaedro	6 a^2	a^3
Octaedro	2 a^2 R[3]	(1/3) a^3 R[2]
Dodecaedro	3a^2 R{25+10·R[5]}	(1/4) a^3 (15+7·R[5])
Icosaedro	5a^2 R[3]	(5/12) a^3 (3+R[5])

Nesta tabela, a notação R[z] significa a raiz quadrada de z≥0.

Prisma

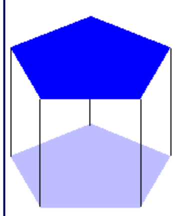
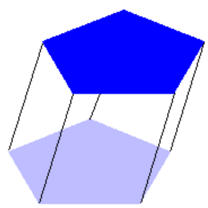
Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

Prisma reto

As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.
As faces laterais são retangulares.

Prisma oblíquo

As arestas laterais têm o mesmo comprimento.
As arestas laterais são oblíquas ao plano da base.
As faces laterais não são retangulares.

	**Bases**: regiões poligonais congruentes **Altura**: distância entre as bases **Arestas laterais paralelas**: mesmas medidas **Faces laterais**: paralelogramos	
Prisma reto	**Aspectos comuns**	**Prisma oblíquo**

Seções de um prisma

Seção transversal

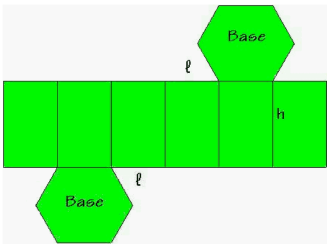
É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.

Seção reta (seção normal)
É uma seção determinada por um plano perpendicular às arestas laterais.
Princípio de Cavaliere
Consideremos um plano P sobre o qual estão apoiados dois sólidos com a mesma altura. Se todo plano paralelo ao plano dado interceptar os sólidos com seções de áreas iguais, então os volumes dos sólidos também serão iguais.

Prisma regular
É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.

Exemplos:
Um prisma triangular regular é um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero.
Um prisma quadrangular regular é um prisma reto cuja base é um quadrado.

Planificação do prisma

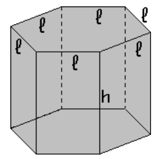


Um prisma é um sólido formado por todos os pontos do espaço localizados dentro dos planos que contêm as faces laterais e os planos das bases. As faces laterais e as bases formam a envoltória deste sólido. Esta envoltória é uma "superfície" que pode ser planificada no plano cartesiano.
Tal planificação se realiza como se cortássemos com uma tesoura esta envoltória exatamente sobre as arestas para obter uma região plana formada por áreas congruentes às faces laterais e às bases.
A planificação é útil para facilitar os cálculos das áreas lateral e total.
Volume de um prisma
O volume de um prisma é dado por:

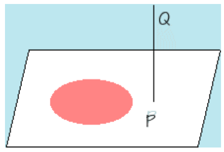
Vprisma = Abase . h

Área lateral de um prisma reto com base poligonal regular

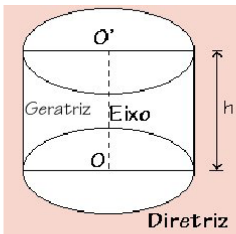
A área lateral de um prisma reto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, basta tomar a área lateral como:

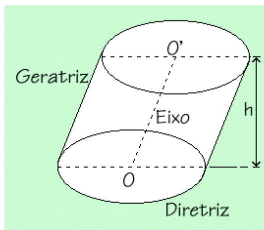


Cilindros



Seja P um plano e nele vamos construir um círculo de raio r. Tomemos também um segmento de reta PQ que não seja paralelo ao plano P e nem esteja contido neste plano P.
Um cilindro circular é a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ com uma extremidade no círculo.
Observamos que um cilindro é uma superfície no espaço R^3, mas muitas vezes vale a pena considerar o cilindro com a região sólida contida dentro do cilindro. Quando nos referirmos ao cilindro como um sólido usaremos aspas, isto é, *"cilindro"* e quando for à superfície, simplesmente escreveremos *cilindro*.
A reta que contém o segmento PQ é denominada *geratriz* e a curva que fica no plano do "chão" é a *diretriz*.





Em função da inclinação do segmento PQ em relação ao plano do "chão", o cilindro será chamado reto ou oblíquo, respectivamente, se o segmento PQ for perpendicular ou oblíquo ao plano que contém a curva diretriz.

Objetos geométricos em um "cilindro"
Num cilindro, podemos identificar vários elementos:
- Base É a região plana contendo a curva diretriz e todo o seu interior. Num cilindro existem duas bases.
- Eixo É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".
- Altura A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro".
- Superfície Lateral É o conjunto de todos os pontos do espaço, que não estejam nas bases, obtidos pelo deslocamento paralelo da geratriz sempre apoiada sobre a curva diretriz.
- Superfície Total É o conjunto de todos os pontos da superfície lateral reunido com os pontos das bases do cilindro.
- Área lateral É a medida da superfície lateral do cilindro.
- Área total É a medida da superfície total do cilindro.
- Seção meridiana de um cilindro É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Classificação dos cilindros circulares

Cilindro circular oblíquo Apresenta as geratrizes oblíquas em relação aos planos das bases.

Cilindro circular reto As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.

Cilindro equilátero É um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um quadrado.

Volume de um "cilindro"

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

$V = A_{base} \times h$

Se a base é um círculo de raio r, então:

$V = \pi r^2 h$

Áreas lateral e total de um cilindro circular reto

Quando temos um cilindro circular reto, a área lateral é dada por:

$A_{lat} = 2\pi r h$

onde **r** é o raio da base e **h** é a altura do cilindro.

$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$

$A_{tot} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$A_{tot} = 2\pi r(h+r)$

Exercícios

1. Dado o cilindro circular equilátero (h = 2r), calcular a área lateral e a área total.

2. Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

3. As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12 cm e volume igual ao dobro do volume do cone. Determinar a altura do cone.

4. Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio R e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

Respostas

1) Solução: No cilindro equilátero, a área lateral e a área total é dada por:

$A_{lat} = 2\pi r. 2r = 4\pi r^2$

$A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$

$A_{tot} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$

$V = A_{base}\ h = \pi r^2. 2r = 2\pi r^3$

2) Solução: Cálculo da Área lateral $A_{lat} = 2\pi r\ h = 2\pi 2.3 = 12\pi cm^2$

Cálculo da Área total $A_{tot} = A_{lat} + 2 A_{base}$ $A_{tot} = 12\pi + 2\pi 2^2 = 12\pi + 8\pi = 20\pi cm^2$

Cálculo do Volume $V = Abase \times h = \pi r^2 \times h$ $V = \pi 2^2 \times 3 = \pi \times 4 \times 3 = 12\pi cm^{33}$

3) Solução:

$h_{prisma} = 12$

$A_{base\ do\ prisma} = A_{base\ do\ cone} = A$

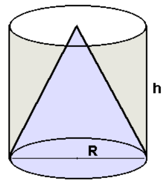
$V_{prisma} = 2 V_{cone}$

$A\ h_{prisma} = 2(A\ h)/3$

$12 = 2.h/3$

$h = 18$ cm

4) Solução:



$V = V_{cilindro} - V_{cone}$

$V = A_{base}\ h - (1/3)\ A_{base}\ h$

$V = Pi\ R^2\ h - (1/3)\ Pi\ R^2\ h$

$V = (2/3)\ Pi\ R^2\ h\ cm^3$

Ponto, Reta e Plano

A definição dos entes primitivos **ponto**, **reta** e **plano** é quase impossível, o que se sabe muito bem e aqui será o mais importante é sua representação geométrica e espacial.

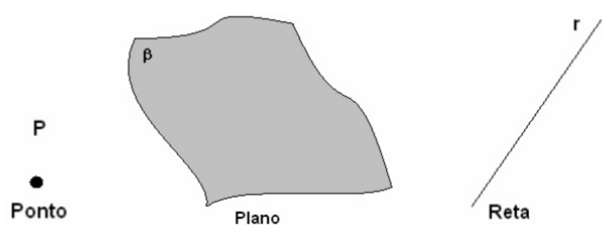
Representação, (notação)

→ Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas; ex: A, B, C,…

→ Retas serão representados por letras latinas minúsculas; ex: a, b, c,…

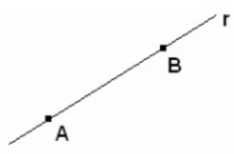
→ Planos serão representados por letras gregas minúsculas; ex: β,∞,α,...

Representação gráfica

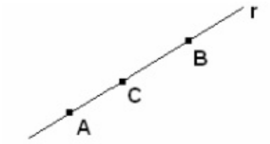


Postulados primitivos da geometria, qualquer postulado ou axioma é aceito sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova.

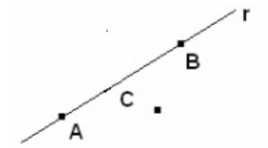
- Numa reta bem como fora dela há infinitos pontos distintos.
- Dois pontos determinam uma única reta (uma e somente uma reta).



- Pontos colineares pertencem à mesma reta.

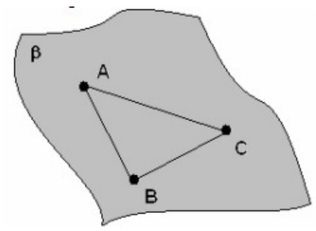


A, B e C são colineares.

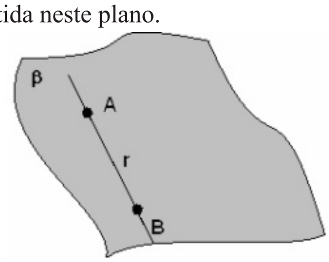


A, B e C não são colineares.

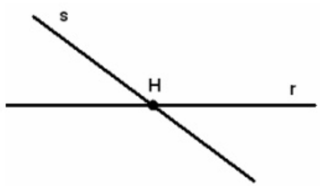
- Três pontos determinam um único plano.



- Se uma reta contém dois pontos de um plano, esta reta está contida neste plano.



- Duas retas são concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum.



Observe que $r \cap s = \{H\}$. Sendo que H está contido na reta **r** e na reta **s**.

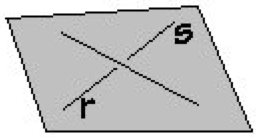
Um plano é um subconjunto do espaço R^3 de tal modo que quaisquer dois pontos desse conjunto podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente contida no conjunto.

Um plano no espaço R^3 pode ser determinado por qualquer uma das situações:

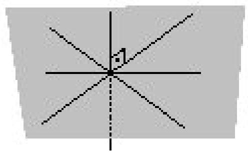
- Três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta);
- Um ponto e uma reta que não contem o ponto;
- Um ponto e um segmento de reta que não contem o ponto;
- Duas retas paralelas que não se sobrepõe;
- Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõe;
- Duas retas concorrentes;
- Dois segmentos de reta concorrentes.

Duas retas (segmentos de reta) no espaço R^3 podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.

Duas retas são ditas reversas quando uma não tem interseção com a outra e elas não são paralelas. Pode-se pensar de uma reta r desenhada no chão de uma casa e uma reta s desenhada no teto dessa mesma casa.



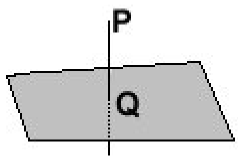
Uma reta é perpendicular a um plano no espaço R^3, se ela intersecta o plano em um ponto P e todo segmento de reta contido no plano que tem P como uma de suas extremidades é perpendicular à reta.



Uma reta r é paralela a um plano no espaço R^3, se existe uma reta s inteiramente contida no plano que é paralela à reta dada.

Seja P um ponto localizado fora de um plano. A distância do ponto ao plano é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano em que uma extremidade é o ponto P e a outra extremidade é o ponto que é a interseção entre o plano e o segmento.

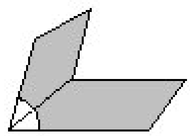
Se o ponto P estiver no plano, a distância é nula.



Planos concorrentes no espaço R^3 são planos cuja interseção é uma reta.

Planos paralelos no espaço R^3 são planos que não tem interseção.

Quando dois planos são concorrentes, dizemos que tais planos formam um diedro e o ângulo formado entre estes dois planos é denominado **ângulo** diedral. Para obter este ângulo diedral, basta tomar o ângulo formado por quaisquer duas retas perpendiculares aos planos concorrentes.



Planos normais são aqueles cujo ângulo diedral é um ângulo reto (90 graus).

Razão entre Segmentos de Reta

Segmento de reta é o conjunto de todos os pontos de uma reta que estão limitados por dois pontos que são as extremidades do segmento, sendo um deles o ponto inicial e o outro o ponto final. Denotamos um segmento por duas letras como, por exemplo, AB, sendo A o início e B o final do segmento.

Exemplo

AB é um segmento de reta que denotamos por AB.

A _______________ B

Não é possível dividir um segmento de reta por outro, mas é possível realizar a divisão entre as medidas dos dois segmentos.

Consideremos os segmentos AB e CD, indicados:

A _________ B m(AB) = 2cm
C ________________ D m(CD) = 5 cm

A razão entre os segmentos AB e CD, denotado aqui por, AB/CD, é definida como a razão entre as medidas desses segmentos, isto é: AB/CD = 2/5

Segmentos Proporcionais

Proporção é a igualdade entre duas razões equivalentes. De forma semelhante aos que já estudamos com números racionais, é possível estabelecer a proporcionalidade entre segmentos de reta, através das medidas desse segmentos.

Vamos considerar primeiramente um caso particular com quatro segmentos de reta:

m(AB) = 2cm	A______B	P__________Q	m(PQ) =4 cm
m(CD) = 3cm	C__________D	R__________________S	m(RS) = 6cm

A razão entre os segmentos AB e CD e a razão entre os segmentos PQ e RS, são dadas por frações equivalentes, isto é: AB/CD = 2/3; PQ/RS = 4/6 e como 2/3 = 4/6, segue a existência de uma proporção entre esses quatro segmentos de reta. Isto nos conduz à definição de segmentos proporcionais.

Diremos que quatro segmentos de reta, AB, BC, CD e DE, nesta ordem, são proporcionais se: AB/BC = CD/DE

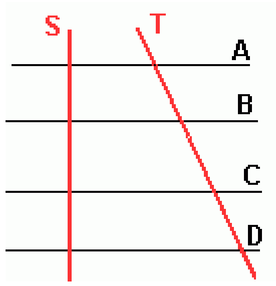
Os segmentos AB e DE são os segmentos extremos e os segmentos BC e CD são os segmentos meios.

A proporcionalidade acima é garantida pelo fato que existe uma proporção entre os números reais que representam as medidas dos segmentos:

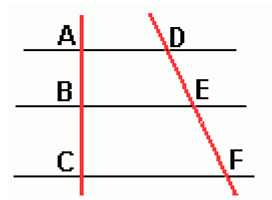
Propriedade Fundamental das proporções: Numa proporção de segmentos, o produto das medidas dos segmentos meios é igual ao produto das medidas dos segmentos extremos. m(AB) · m(DE) = m(BC) · m(CD)

Feixe de Retas Paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado feixe de retas paralelas. A reta que intercepta as retas do feixe é chamada de reta transversal. As retas A, B, C e D que aparecem no desenho anexado, formam um feixe de retas paralelas enquanto que as retas S e T são retas transversais.



Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. A figura abaixo representa uma situação onde aparece um feixe de três retas paralelas cortadas por duas retas transversais.

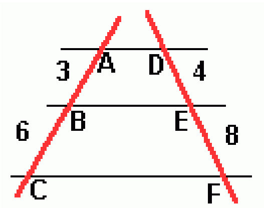


Identificamos na sequência algumas proporções:

AB/BC = DE/EF
BC/AB = EF/DE
AB/DE = BC/EF
DE/AB = EF/BC

Exemplo

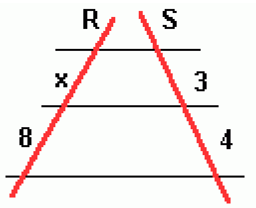
Consideremos a figura ao lado com um feixe de retas paralelas, sendo as medidas dos segmentos indicadas em centímetros.



Assim:

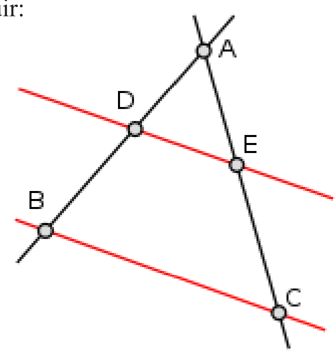
BC/AB = EF/DE
AB/DE = BC/EF
DE/AB = EF/BC

Observamos que uma proporção pode ser formulada de várias maneiras. Se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada com o uso de razões proporcionais.



Exercício

Nos exercícios de 1 a 3, utilize Teorema de Tales para determinar o que se pede a respeito da situação ilustrada pela imagem a seguir:



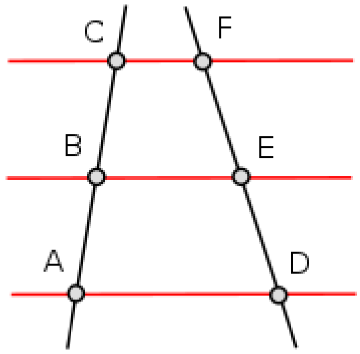
As retas *DE* e *BC* são paralelas.

Exercício 1: Considerando a figura acima, determine o comprimento do segmento $\overline{AD}$, supondo que $\overline{DB}$ = 5cm, $\overline{EC}$ = 10cm e $\overline{AE}$ = 8cm.

Exercício 2: Determine $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$, supondo que na figura ao lado $\overline{AB}$ = 26cm, $\overline{AE}$ = 8cm e $\overline{EC}$ = 5cm

Exercício 3: Determine AD e DB, supondo que $\overline{AB}$ = 27cm, $\overline{AE}$ = 10cm e $\overline{AC}$ = 18cm

Do exercício 4 até o exercício 7, utilize Teorema de Tales para determinar o que se pede a respeito da situação ilustrada pela seguinte imagem:



As retas *AD*, *BE* e *CF* são paralelas.

Exercício 4: Determine $\overline{AB}$, supondo que $\overline{BC}$ = 10cm, $\overline{DE}$ = 18cm e $\overline{EF}$ =20cm

Exercício 5: Determine $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ supondo que $\overline{AC}$ = 30cm, $\overline{DE}$ = 8cm e $\overline{EF}$ = 7cm.

Exercício 6: Determine a medida de $\overline{AB}$, supondo que $\overline{AC}$ = 20cm, $\overline{DF}$ = 30cm e que $\overline{EF}$ é 4cm maior que $\overline{BC}$.

Exercício 7: Determine $\overline{AC}$ supondo que $\overline{DE}$ = 12cm, $\overline{EF}$ = 8cm e que $\overline{AB}$ é 3*cm* maior que $\overline{BC}$.

Exercício 8: Considere um triângulo Δ ABC tal que $\overline{AB}$ = 5, $\overline{BC}$ = 6 e $\overline{CA}$ = 7. Desenhe sobre o segmento $\overline{BC}$ um ponto *M* tal que $\overline{BM}$. A reta paralela a $\overline{AC}$ que passa por *M* encontra $\overline{BA}$ no ponto *N*. Calcule $\overline{BN}$, $\overline{AN}$ e $\overline{MN}$.

Respostas:

01- AD=4cm
02- 8 e 18 respectivamente.
03- 15 e 12 respectivamente.
04- 09cm
05- 16 e 14 respectivamente.
06- 12cm
07- 15cm
08- 10/3 , 5/3 e 14/3 respectivamente.

1.9 TRIGONOMETRIA: ARCOS E ÂNGULOS, VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCOS NOTÁVEIS, FÓRMULAS DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, DUPLICAÇÃO E EBISSECÇÃO DE ARCOS, RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS.

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Definiremos algumas relações e números obtidos a partir dos lados de triângulos retângulos. Antes, porém, precisamos rever algumas de suas propriedades.

A fig. 1 apresenta um triângulo onde um de seus ângulos internos é reto (de medida 90º ou $\frac{\pi}{2}$ rad), o que nos permite classificá-lo como um triângulo retângulo.

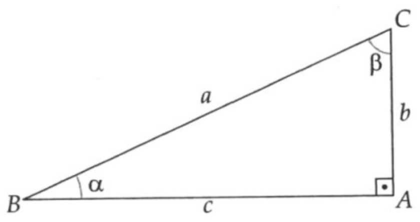


figura 1

Lembremo-nos de que, qualquer que seja o triângulo, a soma dos seus três ângulos internos vale 180º. Logo, a respeito do triângulo ABC apresentado, dizemos que:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Com isso, podemos concluir:

- Que os ângulos α e β são complementares, isto é, são ângulos cujas medidas somam 90º;
- Uma vez que são complementares ambos terão medida inferior a 90º.

Portanto, dizemos que todo triângulo retângulo tem um ângulo interno reto e dois agudos, complementares entre si.

De acordo com a figura, reconhecemos nos lados b e c os catetos do triângulo retângulo e em a sua hipotenusa.

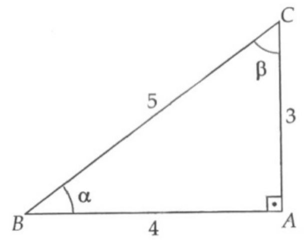
Lembremo-nos de que a hipotenusa será sempre o lado oposto ao ângulo reto em, ainda, o lado maior do triângulo. Podemos relacioná-los através do Teorema de Pitágoras, o qual enuncia que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos (sic) ou, em linguajar moderno, “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo”.

Aplicado ao nosso triângulo, e escrito em linguagem matemática, o teorema seria expresso como segue:

$a^2 = b^2 + c^2$

Seno, Co-seno e Tangente de um Ângulo Agudo

A fig. 2 ilustra um triângulo retângulo conhecido como triângulo pitagórico, classificação devida ao fato de que, segundo a tradição grega, através dele Pitágoras enunciou seu Teorema.



De fato, as medidas de seus lados (3, 4 e 5 unidades de comprimento) satisfazem a sentença $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Apesar de nos apoiarmos particularmente no triângulo pitagórico, as relações que iremos definir são válidas para todo e qualquer triângulo retângulo. Apenas queremos, dessa forma, obter alguns resultados que serão comparados adiante.

Definimos seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo pelas relações apresentadas no quadro a seguir:

Seno do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot ângulo}{hipotenusa}$

Co-seno do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot ângulo}{hipotenusa}$

Tangente do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot ângulo}{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot ângulo}$

A partir dessas definições, o cálculo de seno, co-seno e tangente do ângulo α, por exemplo, nos fornecerão os seguintes valores:

sen α = $\dfrac{3}{5}$ = 0,6

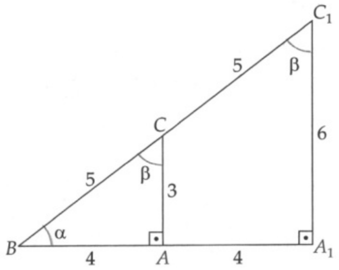
cos α = $\dfrac{4}{5}$ = 0,8

tg α = $\dfrac{3}{4}$ = 0,75

Ao que acabamos de ver, aliemos um conhecimento adquirido da Geometria. Ela nos ensina que dois triângulos de lados proporcionais são semelhantes.

Se multiplicarmos, então, os comprimentos dos lados de nosso triângulo pitagórico semelhante, com os novos lados (6, ,8 e 10) igualmente satisfazendo o Teorema de Pitágoras.

Na fig. 3, apresentamos o resultado dessa operação, em que mostramos o triângulo *ABC*, já conhecido na fig. 1 e A_1BC_1.



Observemos que os ângulos α e β permanecem sendo os ângulos agudos internos do triângulo recém-construído.

Lançando Mao das medidas dos novos lados $\overline{A_1B}, \overline{BC_1} e \overline{A_1C_1}$ (respectivamente 8, 10 e 6 unidades de comprimento), calculemos, para o ângulo α, os valores de seno, co-seno e tangente:

sen α = $\frac{8}{10}$ = 0,6

cos α = $\frac{8}{10}$ = 0,8

tg α = $\frac{6}{8}$ = 0,75

Nosso intuito, na repetição dessas operações, é mostrar que, não importando se o triângulo PE maior ou menor, as relações definidas como seno, co-seno e tangente têm, individualmente, valores constantes, desde que calculados para os mesmo ângulos.

Em outras palavras, seno, co-seno e tangente são funções apenas dos ângulos internos do triângulo, e não de seus lados.

Outras Razões Trigonométricas – Co-tangente, Secante e Co-secante

Além das razões com que trabalhamos até aqui, são definidas a co-tangente, secante e co-secante de um ângulo agudo de triângulo retângulo através de relações entre seus lados, como definimos no quadro a seguir:

cot do ângulo = $\dfrac{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot ângulo}{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot ângulo}$

sec do ângulo = $\dfrac{hipotenusa}{cateto \cdot adjacente \cdot ao \cdot ângulo}$

cosec do ângulo = $\dfrac{hipotenusa}{cateto \cdot oposto \cdot ao \cdot ângulo}$

Por exemplo, para um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento, como exibido na fig. 6, teríamos, para o ângulo α,

cotg α = $\frac{4}{3}$

sec α = $\frac{5}{4}$

cosec α = $\frac{5}{3}$

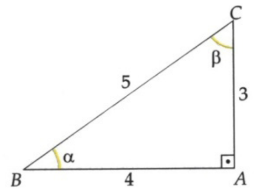
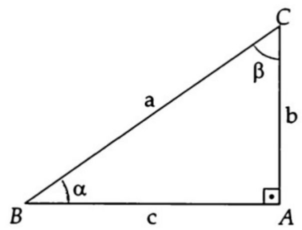


fig. 6

Seno, Co-seno, Tangente e Co-tangente de Ângulos Complementares

Já foi visto que em todo triângulo retângulo os ângulos agudos são complementares.



$\alpha + \beta = 90^{\circ}$

Sabemos ainda que:

sen α = $\frac{b}{a}$ sen β = $\frac{c}{a}$

cos α = $\frac{c}{a}$ cos β = $\frac{b}{a}$

tg α = $\frac{b}{c}$ tg β = $\frac{c}{b}$

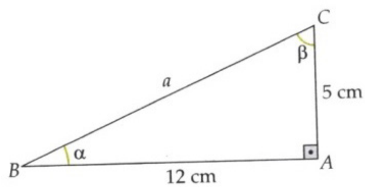
cotg α = $\frac{c}{b}$ cotg β = $\frac{b}{c}$

Verifica-se facilmente que:

sen α = cos β; cos α = sen β;
tg α = cotg β; cotg α = tg β.

Exemplo

Um triângulo retângulo tem catetos cujas medidas são 5 cm e 12 cm. Determine o valor de seno, co-seno e tangente dos seus ângulos agudos.



Resolução

Para respondermos ao que se pede, necessitaremos do comprimento da hipotenusa do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

Logo, $a = 13$ cm. Assim, obtemos para seno, co-seno e tangente dos ângulos da Figura, os seguintes valores:

$$sen\alpha = \frac{5}{13} \bullet con\alpha = \frac{12}{13} \bullet tg\alpha = \frac{5}{12}$$

$$sen\beta = \frac{12}{13} \bullet con\beta = \frac{5}{13} \bullet tg\beta = \frac{12}{5}$$

Ângulos Notáveis

Seno, Co-seno e Tangente dos Ângulos Notáveis

Uma vez definidos os conceitos de seno, co-seno e tangente de ângulos agudos internos a um triângulo retângulo, passaremos a determinar seus valores para ângulos de grande utilização em diversas atividades profissionais e encontrados facilmente em situações cotidianas.

Por exemplo, na Mecânica, demonstra-se que o ângulo de lançamento, tomado com relação à horizontal, para o qual se obtém o máximo alcance com uma mesma velocidade de tiro, é de 45º; uma colméia é constituída, interiormente, de hexágonos regulares, que por sua vez, são divisíveis, cada um, em seis triângulos equiláteros, cujos ângulos internos medem 60º; facilmente encontram-se coberturas de casas, de regiões tropicais, onde não há neve, com ângulo de inclinação definido nos 30º, etc.

Vamos selecionar, portanto, figuras planas em que possamos delimitar ângulo com as medidas citadas (30º, 45º e 60º). Para isso, passaremos a trabalhar com o quadrado e o triângulo equilátero.

Observemos, na figura 4 e na figura 5, que a diagonal de um quadrado divide ângulos internos opostos, que são retos, em duas partes de 45 + o+, e que o segmento que define a bissetriz (e altura) de um ângulo interno do triângulo equilátero permite-nos reconhecer, em qualquer das metades em que este é dividido, ângulos de medidas 30º e 60º.

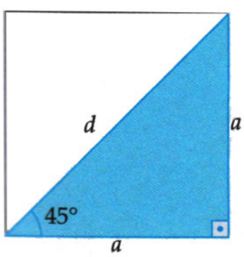


Figura 4

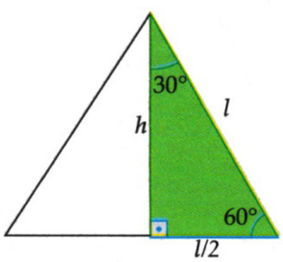


Figura 5

Primeiramente, vamos calcular os comprimentos da diagonal do quadrado (identificado na figura 4 por *d*) e a altura *h*, do triângulo equilátero (figura 5).

Uma vez que as regiões sombreadas nas figuras são triângulos retângulos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para cada um deles.

Para o meio-quadrado, temos que:

$D^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d^2 = 2 \,.\, a^2$

$$\therefore d = a\sqrt{2}$$

Quanto ao triângulo equilátero, podemos escrever o seguinte:

$$l^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow \therefore h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos, agora, que o triângulo hachurado no interior do quadrado tem catetos de medida ***a*** e hipotenusa ***a*** $\sqrt{2}$. Para o outro triângulo sombreado, teremos catetos e medidas $\frac{1}{2} e \frac{l\sqrt{3}}{2}$, enquanto sua hipotenusa tem comprimento *l*.

Passemos, agora, ao cálculo de seno, co-seno e tangente dos ângulos de 30ºm 45º e 60º.

Seno, Co-seno e Tangente de 30º e 60º.

Tomando por base o triângulo equilátero da figura 5, e conhecendo as medidas de seus lados, temos:

$$\text{sen } 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\ 30^o = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60^o = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ 60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^o = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

Seno, Co-seno e Tangente de 45º

A partir do quadrado representado na figura 4, de lado ***a*** e diagonal ***a*** $\sqrt{2}$, podemos calcular:

sen 45º= $\dfrac{a}{d}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

cos 45º= $\dfrac{a}{d}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 45^o=\dfrac{a}{a}=1$

Os resultados que obtivemos nos permitem definir, a seguir, uma tabela de valores de seno, co-seno e tangente dos ângulos notáveis, que nos será extremamente útil.

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identidades Trigonométricas

É comum a necessidade de obtermos uma razão trigonométrica, para um ângulo, a partir de outra razão cujo valor seja conhecido, ou mesmo simplificar expressões extensas envolvendo várias relações trigonométricas para um mesmo ângulo.

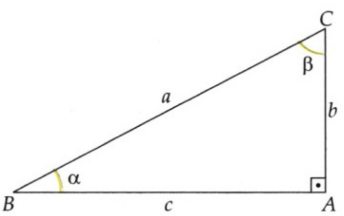
Nesses casos, as identidades trigonométricas que iremos deduzir neste tópico são ferramentas de grande aplicabilidade.

Antes de demonstrá-las, é necessário que definamos o que vem a ser uma identidade.

Identidade em uma ou mais variáveis é toda igualdade verdadeira para quaisquer valores a elas atribuídos, desde que verifiquem as condições de existência de expressão.

Por exemplo, a igualdade $x+\frac{2}{x}=\frac{2x^2+4}{2x}$ é uma identidade em x, pois é verdadeira para todo x real, desde q $x\neq 0$ (divisão por zero é indeterminado ou inexistente).

Fig. A



Vamos verificar agora como se relacionam as razões trigonométricas que já estudamos. Para isso, faremos uso do triângulo *ABC* apresentado na figura A, retângulo em *A*.

Aplicando as medidas de seus lados no teorema de Pitágoras, obtemos a seguinte igualdade:

$b^2 + c^2 = a^2$

Dividindo os seus membros por a^2, não alteraremos a igualdade. Assim, teremos:

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}\Rightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1$$

Observemos que as frações entre parênteses podem definir, com relação ao nosso triângulo, que:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ e $cos^2\beta + sen^2\ \beta = 1$

Podemos afirma, portanto, que a soma dos quadrados de seno e co-seno de um ângulo x é igual à unidade, ou seja:

$Sen^2x + cos^2x = 1$

Expliquemos o significado da partícula co, que inicia o nome das relações co-seno, cotangente e co-secante. Ela foi introduzida por Edmund Gunter, em 1620, querendo indicar a razão trigonométrica do complemento. Por exemplo, co-seno de 22º tem valor idêntico ao seno de 68º (complementar de 22º)

Assim, as relações co-seno, co-tangente e co-secante de um ângulo indicam, respectivamente, seno, tangente e secante do complemento desse ângulo.

Assim, indicando seno, tangente e secante simplesmente pelo nome de razão, podemos dizer que:

co-razão x = razão (90º $-x$)

Facilmente podemos concluir, com base no triângulo apresentado na figura A, que:

sen α=cos β sen β=cos α
tg α=cotg β tg β=cotg α
sec α=cossec β sec β=cossec α

Façamos outro desenvolvimento. Tomemos um dos ângulos agudos do triângulo *ABC*, da figura A. Por exemplo, α. Dividindo-se sen α por cos α, obtemos:

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\beta}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{a}.\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=tg\ \alpha$$

De forma análoga, o leitor obterá o mesmo resultado se tomar o ângulo β. Dizemos, portanto, que, para um ângulo x, tal que cós $x \neq 0$,

$$tg\ x=\frac{sen\ x}{\cos x}$$

Podemos observar, também, que a razão $\frac{b}{c}$, que representa tg α, se invertida (passando a $\frac{c}{b}$), vem a constituir cotg α. Em virtude disso, e aproveitando a identidade enunciada anteriormente, podemos dizer que, para todo ângulo x de seno não-nulo:

$$\text{cotg } x=\frac{1}{tg\ x}=\frac{\cos x}{sen\ x}$$

Tais inversões ocorrem também e se tratando das relações seno, co-seno, secante e co-secante. Vejamos que:

$$\begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{a}{b} \\ \cos ec\ \alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases} \quad \text{E} \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \sec\ \alpha = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

Teríamos encontrado inversões semelhantes se utilizássemos o ângulo β.

Dizemos, assim, que, para um dado ângulo *x*,

$$\sec x = \frac{1}{cox\ x}$$

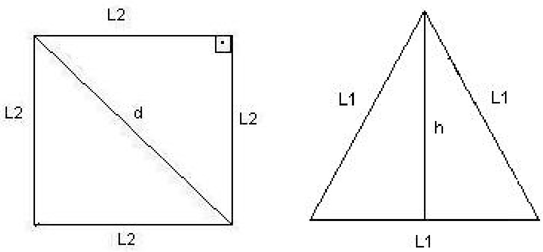
$$\text{cosec}\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

Desde que seja respeitada a condição de os denominadores dos segundos membros dessas identidades não serem nulos.

Exercícios

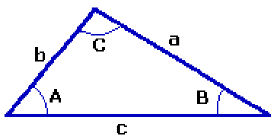
1. Sabe-se que, em qualquer triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da medida da hipotenusa. Se um triângulo retângulo tem catetos medindo 5cm e 2cm, calcule a representação decimal da medida da mediana relativa a hipotenusa nesse triângulo.

2. Um quadrado e um triângulo equilátero têm o mesmo perímetro. Sendo h a medida da altura do triângulo e d a medida da diagonal do quadrado. Determine o valor da razão h/d.

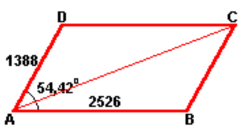


3. As raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ expressam em centímetros as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Determine a medida da hipotenusa e o perímetro desse triângulo.

4. Seja o triângulo ABC, mostrado na figura, onde a = 20, b = $10\sqrt{2}$ e B = 30. Calcular o raio do círculo circunscrito e o ângulo C.



5. Os lados adjacentes de um paralelogramo medem 1388m e 2526m e o ângulo formado entre estes lados mede 54,42º. Determinar o comprimento da maior diagonal desse quadrilátero.



6. Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

a) 11 / 24
b) - 11 / 24
c) 3 / 8
d) - 3 / 8
e) - 3 / 10

7. Se x e y são dois arcos complementares, então podemos afirmar que A = $(\cos x - \cos y)^2 + (\text{sen}x + \text{sen}y)^2$ é igual a:

a) 0
b) ½
c) 3/2
d) 1
e) 2

8. Calcule sen 2x sabendo-se que tg x + cotg x = 3.

9. Qual o domínio e o conjunto imagem da função y = arcsen 4x?

10. Calcule o triplo do quadrado do coseno de um arco cujo quadrado da tangente vale 2.

Respostas

1) Solução:

$$h^2 = 5^2 + 2^2$$

$$h^2 = 25 + 4$$

$$h^2 = 29$$

$$h = \sqrt{29}$$

$$mediana = \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{5,38}{2} = 2,69$$

2) Solução:

$$4L_2 = 3L_1$$
$$L_2 = \frac{3}{4}L_1$$
$$d^2 = L_2{}^2 + L_2{}^2$$
$$d^2 = 2L_2{}^2$$
$$d = L_2\sqrt{2}$$
$$d = \frac{3}{4}L_1\sqrt{2}$$
$$L_1{}^2 = \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = L_1{}^2 - \frac{L_1{}^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{4L_1{}^2 - L_1{}^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3L_1{}^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3L_1{}^2}{4}}$$
$$h = \frac{L_1\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{h}{d} = \frac{\frac{L_1\sqrt{3}}{2}}{\frac{3L_1\sqrt{2}}{4}} = \frac{L_1\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{3L_1\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3) Solução:

$$x2 - 14x + 48 = 0$$
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)2 - 4.148}}{2.1}$$
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2}$$
$$x = \frac{14 + 2}{2}$$
$$x_1 = \frac{14 + 2}{2} = 8$$
$$x2 = \frac{14 - 2}{2} = 6$$
$$h^2 = 62 + 82$$
$$h^2 = 36 + 64$$
$$h^2 = 100$$
$$h = \sqrt{100}$$
$$h = 10cm$$
$$P = 6 + 8 + 10 = 24cm$$

4) Solução:

Pela Lei dos senos, b = 2R . sen(B), logo $10\sqrt{2}$ = 2R . sen(30) e desse modo R = $10\sqrt{2}$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, calcularemos o ângulo A.

Pela Lei dos Senos, b . sem (A) = a . sen(B), de onde segue que $10\sqrt{2}$. sem(A) = 20 . sen(30), assim, sem (A) = $\sqrt{2}/2$

Como A é um dos ângulos do triângulo então A = 45º ou A = 135º.

Como B = 30°, da relação A + B + C = 180º, segue que A + C = 150° e temos duas possibilidades:

1. A = 45º e C = 105º
2. A = 135º e C = 15º.

5) Solução:

No triângulo ABC, A + C = 54,42º, então: B = 180º - 54,42º = 125,58º

A lei dos cossenos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$

garante que:

$b^2 = (1388)^2 + (2526)^2 - 2(1388)(2526) \cos(125{,}58º)$

Assim, b = 3519,5433 e então garantimos que a maior diagonal do paralelogramo mede aproximadamente 3519,54 metros.

6) Resposta "B".

Solução: Sabemos que num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Logo, o maior ângulo será aquele oposto ao lado de medida 6. Teremos então, aplicando a lei dos cossenos:

$6^2 = 3^2 + 4^2$ - 2 . 3 . 4 . cos b \ 36 - 9 - 16 = - 24 . cos b \ cos b = - 11 / 24 e, portanto, a alternativa correta é a letra B.

Lembrete: TC - Teorema dos cossenos: Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o dobro do produto desses lados pelo cosseno do angulo que eles formam.

7) Resposta "E".

Solução: Desenvolvendo os quadrados, vem:

A = $\cos^2$ x - 2 . cosx . cosy + $\cos^2$ y + sen^2 x + 2 . senx . seny + sen^2 y

Organizando convenientemente a expressão, vem:

A = ($\cos^2$ x + sen^2 x) + (sen^2 y + $\cos^2$ y) - 2 . cosx . cosy + 2 . senx . seny

A = 1 + 1 - 2 . cosx . cosy + 2 . senx . seny

A = 2 - 2 . cosx . cosy + 2 . senx . seny

Como os arcos são complementares, isto significa que x + y = 90º \ y = 90º - x.

Substituindo, vem:

A = 2 - 2 . cosx . cos(90º - x) + 2 . senx . sen(90º - x)

Mas, cos(90º - x) = senx e sen(90º - x) = cosx, pois sabemos que o seno de um arco é igual ao cosseno do seu complemento e o cosseno de um arco é igual ao seno do seu complemento.

Logo, substituindo, fica:
A = 2 - 2 . cosx . senx + 2 . senx . cosx
A = 2 + (2senxcosx - 2senxcosx) = 2 + 0 = 2 , e portanto a alternativa correta é a letra E.

8) Solução:
Escrevendo a tgx e cotgx em função de senx e cosx , vem:

$$\frac{senx}{\cos x}+\frac{\cos x}{senx}=3\therefore\frac{sen^2 x+\cos^2 x}{senx\cos x}=3\therefore\frac{1}{senxconx}=3$$

Daí, vem: 1 = 3 . senx . cosx \ senx . cosx = 1 / 3. Ora, sabemos que sen 2x = 2 . senx . cosx e portanto senx . cosx = (sen 2x) / 2 , que substituindo vem:
(sen 2x) / 2 = 1 / 3 e, portanto, sen 2x = 2 / 3.

9. Solução:
Podemos escrever: 4x = seny. Daí, vem:
Para x: -1 £ 4x £ 1 Þ -1/4 £ x £ 1/4. Portanto, Domínio = D = [-1/4, 1/4].
Para y: Da definição vista acima, deveremos ter
-p /2 £ y £ p /2.
Resposta: D = [-1/4, 1/4] e Im = [-p /2, p /2].

10) Solução:
Seja x o arco. Teremos:
$tg^2x = 2$

Desejamos calcular $3.cos^2x$, ou seja, o triplo do quadrado do coseno do arco.
Sabemos da Trigonometria que: $1 + tg^2x = sec^2x$

Portanto, substituindo, vem: $1 + 2 = sec^2x = 3$
Como sabemos que:
secx = 1/cosx , quadrando ambos os membros vem:
$sec^2x = 1/ cos^2x$ \ $cos^2x = 1/sec^2x = 1/3$ \ $3cos^2x = 3(1/3) = 1$
Portanto, o triplo do quadrado do coseno do arco cuja tangente vale 2, é igual à unidade.
Resposta: 1

1.10 GEOMETRIA ANALÍTICA: COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO, DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS, EQUAÇÃO DA RETA, RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES, DISTÂNCIA ENTRE UM PONTO E UMA RETA.

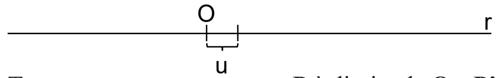
A Geometria Analítica é a parte da Matemática que trata de resolver problemas cujo enunciado é geométrico, empregando processos algébricos.

Criada por René Descartes (1596-1650), a Geometria Analítica contribui para a visão moderna da Matemática como um todo, substituindo assim a visão parcelada das chamadas “matemáticas”, que colocava em compartilhamentos separados Geometria, Álgebra e Trigonometria.

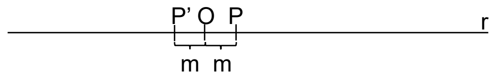
Essa integração da Geometria com Álgebra é muito rica em seus resultados, propriedades e interpretações. São inúmeras as aplicações da Geometria Analítica nas Ciências e na Técnica.

1- Abscissa de um ponto

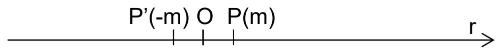
Considere-se uma reta **r**. Sobre ela, marque-se um ponto **O** arbitrário, que chamaremos de origem, e seja adotada uma unidade (**u**) de comprimento com a qual serão medidos os segmentos contidos na reta **r**.



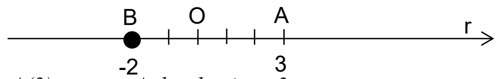
Tome-se na reta **r** os pontos **P** à direita de **O** e **P’** à esquerda de **O**, tais que, relativamente a (**u**), os segmentos e tenham a mesma medida **m**.



O sentido de **O** para **P** será considerado positivo e indicado por uma ponta de seta. Assim associa-se ao ponto **P** o número real positivo **m** e ao ponto **P’**, o número **–m**.



Dessa forma, associa-se a cada ponto da reta r um único número real, que será denominado abscissa (ou coordenada) do ponto; a abscissa é positiva se, a partir da origem, o ponto for marcado no sentido positivo, e é negativa em caso contrário.

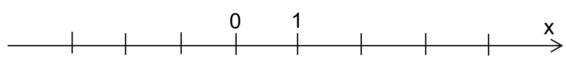


A(3): ponto A de abscissa 3
B (-2): ponto B de abscissa -2

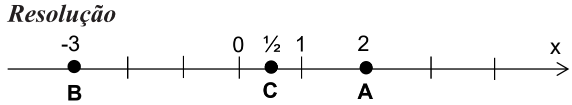
O conjunto {reta, origem, unidade, sentido} será chamado **eixo**.

Notas
1) A abscissa da origem é o número real 0 (zero).
2) Cada ponto de um eixo possui uma única abscissa, e reciprocamente para cada abscissa existe um único ponto do eixo.
3) Costuma-se indicar pela letra x a abscissa de um ponto.

Exemplo 1
Marcar sobre o eixo x, representado abaixo, os pontos A(2), B(-3) e C$\left(\frac{1}{2}\right)$.

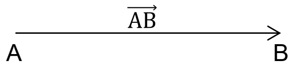


Resolução



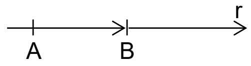
2- Segmento Orientado

Dado um segmento de reta AB, é possível associar a ele o sentido de A para B ou o sentido de B para A. adotando-se, por exemplo, o sentido de A para B, tem-se o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ de origem A e extremidade B.



3- Medida Algébrica

Considere-se sobre um eixo r um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.



A medida algébrica de $\overrightarrow{AB}$, que será indicada por $\overline{AB}$, é definida pelo número $X_B – X_A$, onde X_B e X_A são respectivamente as abscissas de B e de A.

Assim:

$$\boxed{\overline{AB} = X_B – X_A}$$

Exemplo 2

a) $\left.\begin{matrix} A(3) \\ B(10) \end{matrix}\right\}$ $\overline{AB} = X_B – X_A = 10 – 3 = 7$

b) $\left.\begin{matrix} A(1) \\ B(8) \end{matrix}\right\}$ $\overline{AB} = X_B – X_A = 1 – 8 = 7$

Observações

1) Quando o sentido de $\overrightarrow{AB}$ é o **mesmo** do eixo, a medida algébrica $\overrightarrow{AB}$ é positiva; em caso contrário, é negativa. Nessas condições, se $\overrightarrow{AB}$ tem medida algébrica positiva, então $\overrightarrow{BA}$ tem medida algébrica negativa.

2) O comprimento **d** de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, é o módulo (valor absoluto) da medida algébrica de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $|\overline{AB}|$.

Em símbolos:

$d = |\overline{AB}| = |X_B - X_A|$

Exemplo 3

a) O comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, dados A(2) e B(11) é

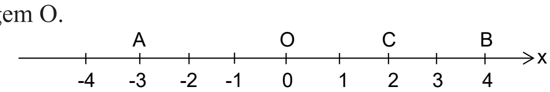
$|\overline{AB}| = |X_B - X_A| = |11 – 2| = |9| = 9$

b) O comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{BA}$, dados A(3) e B(8) é

$|\overline{AB}| = |X_B - X_A| = |3 - 8| = |-5| = 5$

Exemplo 4

Na figura abaixo, os pontos A, B e C estão sobre o eixo x de origem O.



Calcular:

a) $\overline{AC}$

b) $\overline{BO}$

c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Resolução

Da figura, tem-se $X_A = -3$, $X_B = 4$ e $X_C = 2$.

Assim,

a) $\overline{AC} = X_C – X_A = 2 – (-3) = 5$

b) $\overline{BO} = X_O – X_B = 0 – 4 = -4$

c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{X_B - X_A}{X_C - X_B} = \dfrac{4-(-3)}{2-4} = -\dfrac{7}{2}$

Exemplo 5

Dados os pontos A(1) e B(9), determinar o ponto C tal que $\overline{AC} = 3 \times \overline{CB}$.

Resolução

Seja X_C a abscisssa do ponto C:

$\overline{AC} = 3 \times \overline{CB} \Rightarrow X_C - X_A = 3(X_B - X_C)$

Substituindo-se as coordenadas dos pontos:

$X_C – 1 = 3(9 - XC)$ ☐ $X_C = 7$

Resposta: C(7).

Exemplo 6

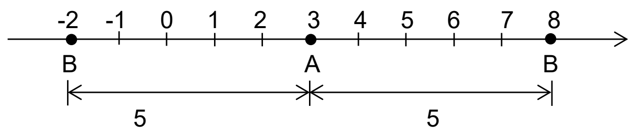
Dado o ponto A(3), determinar um ponto B que diste 5 unidades do ponto A.

Resolução

Seja XB a abscissa de B. Tem-se: $|\overline{AB}| = 5$, ou seja, $|X_B - X_A| = 5$

Então |XB – 3| = 5 $\begin{cases} X_B – 3 = 5 \rightarrow XB = 8 \\ \text{ou} \\ X_B – 3 = -5 \rightarrow XB = -2 \end{cases}$

De fato, existem dois pontos B que distam 5 unidades de A:



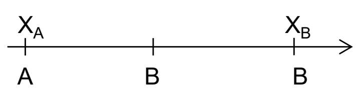
Resposta: B(8) ou B(-2).

4- Ponto Médio

Considerem-se os pontos $A(X_A)$ e $B(X_B)$. Sendo $M(X_M)$ o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$ (ou de $\overrightarrow{BA}$), tem-se:

$$\boxed{X_M = \frac{X_A + X_B}{2}}$$

De fato,



$\overline{AM} = \overline{MB}$

$X_M - X_A = X_B - X_M$

$2X_M = X_A + X_B$

$X_M = \frac{X_A + X_B}{2}$

Portanto, a abscissa do ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$ (ou de $\overrightarrow{BA}$) é a média aritmética das abscissas de A e de B.

Exemplo 7

Determinar o ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$, nos seguintes casos:

a) A(1) e B(7)

Resolução

$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$

Resposta: M(4).

b) A(-3) e B(15)

Resolução

$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} = \frac{-3+15}{2} = 6$

Resposta: M(6).

c) A(-1) e B(-12)

Resolução

$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} = \frac{-1+(-12)}{2} = -\frac{13}{2}$

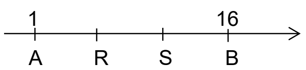
Resposta: $M\left(-\frac{13}{2}\right)$.

Exemplo 8

Dados os pontos A(1) e B(16), obter os pontos que dividem o segmento $\overrightarrow{AB}$ em três partes congruentes.

Resolução

Considere-se a figura abaixo, onde R e S são os pontos pedidos.



Como $\overline{AR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SB}$ são iguais, pode-se escrever $\overline{AR} = 2\,\overline{SB}$, ou seja,

$X_S - X_A = 2(X_B - X_S)$

$X_S - 1 = 2(16 - X_S) \therefore X_S = 11$

Sendo R o ponto médio de $\overrightarrow{AS}$, vem:

$X_R = \frac{X_A + A_S}{2} = \frac{1 + 11}{2} = 6$

Resposta: R(6) e S(11).

Sistema Cartesiano

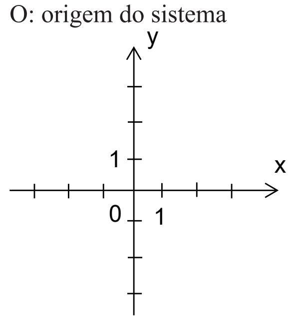
1- Coordenadas de um ponto

Sejam *x* e *y* dois eixos perpendiculares entre si e com origem O comum, conforme a figura abaixo. Nessas condições, diz-se que x e y formam um **sistema cartesiano retangular** (ou **ortogonal**), e o plano por eles determinado é chamado **plano cartesiano**.

Eixo x (ou Ox): eixo das abscissas

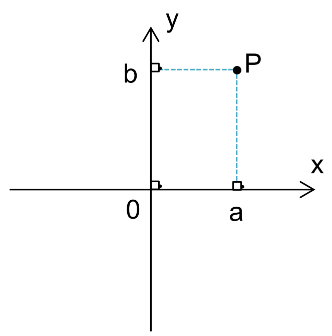
Eixo y (ou Ou): eixo das ordenadas

O: origem do sistema



A cada ponto P do plano corresponderão dois números: **a** (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções ortogonais de P sobre o eixo x e sobre o eixo y, respectivamente.

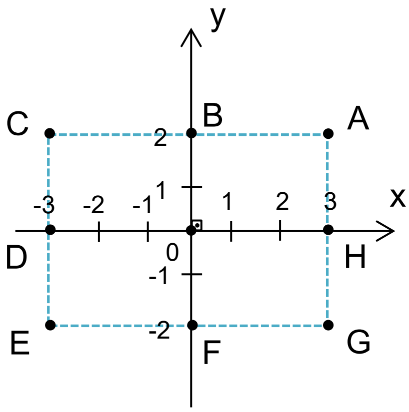
Assim, o ponto P tem coordenadas **a** e **b** e será indicado analiticamente pelo par ordenado (a, b).



Exemplo 1

Os pontos, no sistema cartesiano abaixo, têm suas coordenadas escritas ao lado da figura.

A (3, 2)
B (0, 2)
C (-3, 2)
D (-3, 0)
E (-3, -2)
F (0, -2)
G (3, -2)
H (3, 0)
O (0, 0)

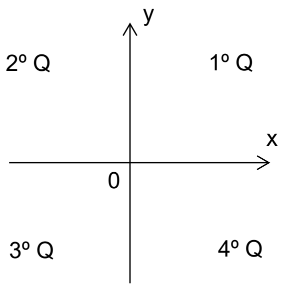


Nota

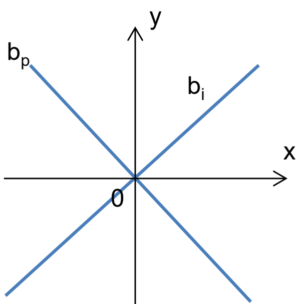
Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano retangular, que se chamará simplesmente sistema cartesiano.

Observações

1) Os eixos *x* e *y* dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou quadrantes (Q), que são numeradas, como na figura abaixo.



2) Neste curso, a reta suporte das bissetrizes do 1º e 3º quadrantes será chamada bissetriz dos quandrantes ímapares e indica-se por b_i.a do 2º e 4º quadrantes será chamado bissetriz dos quadrantes pares e indica-se por b_p.

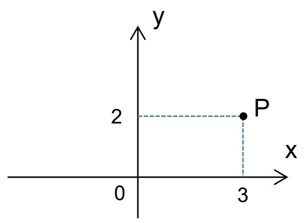


2- Propriedades

1) Todo ponto P(a, b) do 1º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

$$P(a, b) \in 1º\ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0$$

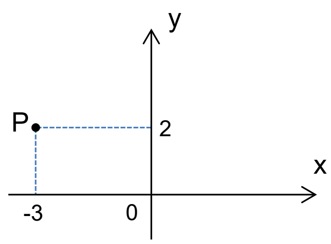
Assim P(3, 2) ∈ 1º Q



2) Todo ponto P(a, b) do 2º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada positiva (B > 0) e reciprocamente.

$$P(a, b) \in 2º\ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0$$

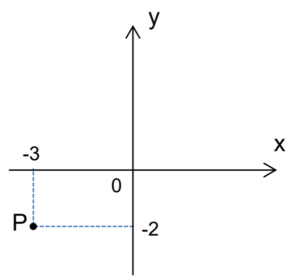
Assim P(-3, 2) ∈ 2º quadrante



3) Todo ponto P(a, b) do 3º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

$$P(a, b) \in 3º\ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0$$

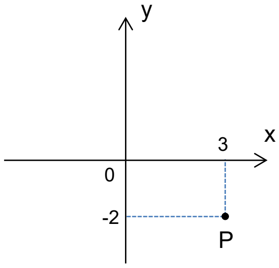
Assim P(-3, -2) ∈ 3º Q



4) Todo ponto P(a, b) do 4º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada negativa (B < 0) e reciprocamente.

$$P(a, b) \in 4º\ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0$$

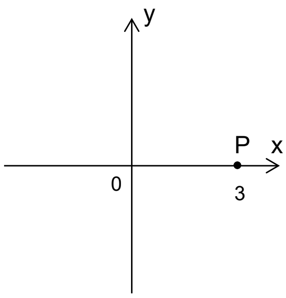
Assim P(3, -2) ∈ 4º Q



5) Todo eixo das abscissas tem ordenada nula e reciprocamente.

$$P(a, b) \in Ox \Leftrightarrow b = 0$$

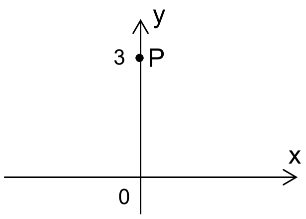
Assim $P(3, 0) \in Ox$



6) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula e reciprocamente.

$$P(a, b) \in Oy \Leftrightarrow a = 0$$

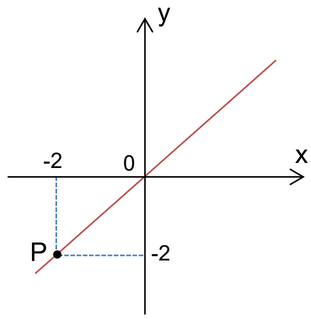
Assim $P(0, 3) \in Oy$



7) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais (a = b) e reciprocamente.

$$P(a, b) \in b_i \Leftrightarrow a = b$$

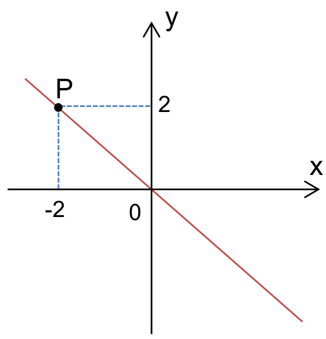
Assim $P(-2, -2) \in b_i$



8) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas (a = -b) e reciprocamente.

$$P(a, b) \in b_p \Leftrightarrow a = -b$$

Assim $P(-2, 2) \in b_p$



Exemplo 2

Obter **a**, sabendo-se que o ponto A(4, 3ª -6) está no eixo das abscissas.

Resolução

$A \in Ox \Rightarrow 3a - 6 = 0 \therefore a = 2$

Resposta: 2.

Exemplo 3

Obter m, sabendo-se que o ponto M(2m – 1, m + 3) está na bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução

$M \in b_i \Rightarrow 2m - 1 = m + 3 \therefore m = 4$

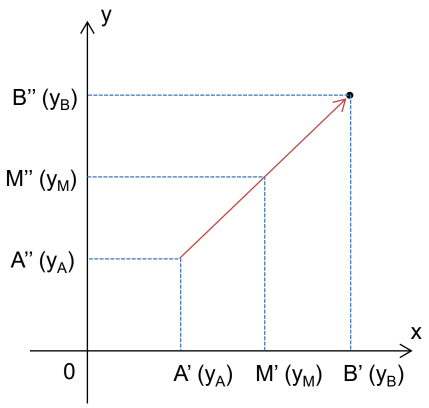
Resposta: 4.

3- Ponto Médio

Considerem-se os pontoa $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overline{BA}$), tem-se:

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, ou seja, o ponto médio é dado por:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



De fato:

Se M é o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$), pelo teorema de Tales, para o eixo x pode-se escrever:

$$\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$$
$$x_M - x_A = x_B - x_M$$
$$2x_M = x_A + x_B$$
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogicamente, para o eixo y, tem-se

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$) são respectivamente as médias das abscissas de A e B e das ordenadas de A e B.

Exemplo 4

Obter o ponto médio M do segmento $\overrightarrow{AB}$, sendo dados: A(-1, 3) e B(0, 1).

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{array}\right\} \therefore M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

Resposta: $M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

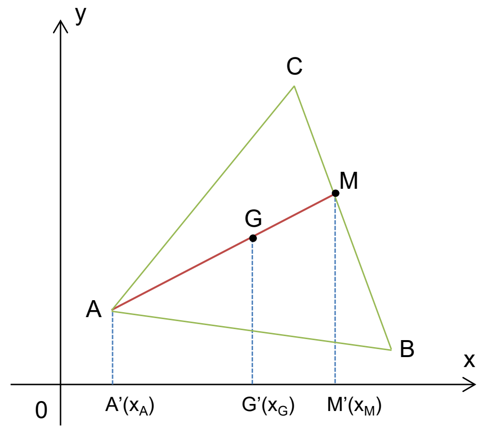
4 – Baricentro

Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. sendo $G(x_G, y_G)$ o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC, tem-se:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

ou seja, o ponto G é dado por

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$



De fato, considerando a mediana AM, o baricentro G é tal que

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$$

Pelo Teorema de Tales, para o eixo x podemos escrever

$$\overline{A'G'} = 2\overline{G'M'}$$

$$x_G - x_A = 2(x_m - x_G) \Rightarrow 3x_G = x_A + 2x_M$$

e, como $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2}$, vem

$$3x_M = x_A + 2.\frac{x_B + x_C}{2}$$

ou seja, $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$

Analogamente, para o eixo y, tem-se

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC são, respectivamente, as médias aritméticas das abscissas de A, B e C e das ordenadas A, B e C.

Exemplo 5

Sendo A(1, -1), B(0, 2) e C(11, 5) os vértices de um triângulo, obter o baricentro G desse triângulo.

Resolução

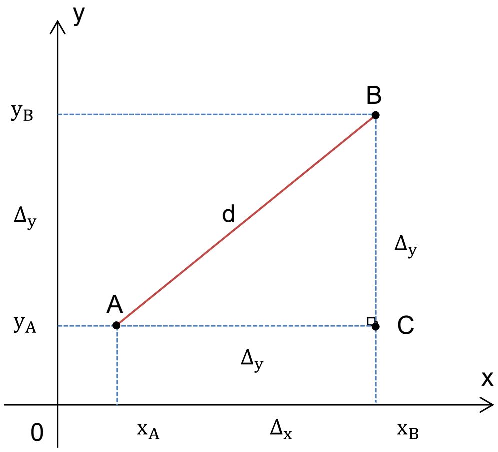
$$x_G = \frac{1+0+11}{3} = 4 \qquad y_G = \frac{-1+2+5}{3} = 2$$

Logo, G(4, 2).

5- Distância Entre Dois Pontos

Considerem-se dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que o segmento $\overrightarrow{AB}$ não seja paralelo a algum dos eixos coordenados.

Traçando-se por A e B as retas paralelas aos eixos coordenados que se interceptam em C, tem-se o triângulo ACB, retângulo em C.



A distância entre os pontos A e B qie se indica por **d** é tal que

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$
$$= (\Delta_x)^2 + \left(\Delta_y\right)^2$$
$$= (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$$

Portanto:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Observações

1) Como $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, a ordem escolhida para a diferença das abscissas não altera o cálculo de **d**. O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas.

2) A fórmula para o cálculo da distância continua válida se o segmento $\overrightarrow{AB}$ é paralelo a um dos eixos, ou ainda se os pontos A e B coincidem, caso em que $d = 0$.

Exemplo 6

Calcular a distância entre os pontos A e B, nos seguintes casos:
a) A(1, 8) e B(4, 12)

Resolução

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

b) A(0, 2) e B(-1, -1)

Resolução

$$d = \sqrt{[0-(-1)]^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Exemplo 7

Qual é o ponto da bissetriz dos quadrantes pares cuja distância ao ponto A(2, 2) é 4?

Resolução

Seja P o ponto procurado.

Como P pertence à bissetriz dos quadrantes pares (b_p), pode-se representá-lo por P(a, -a).

Sendo 4 a distância entre A e P, tem-se

$$\sqrt{(2-a)^2 + [2-(-a)]^2} = 4$$

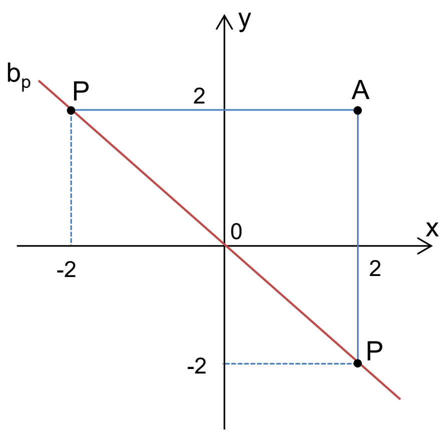
Quadrando

$$(2 - a)^2 + (2 + a)^2 = 16$$

$$4 - 4a + a^2 + 4 + 4a + a^2 = 16 \therefore a^2 = 4 \begin{cases} a = 2 \\ \text{ou} \\ a = -2 \end{cases}$$

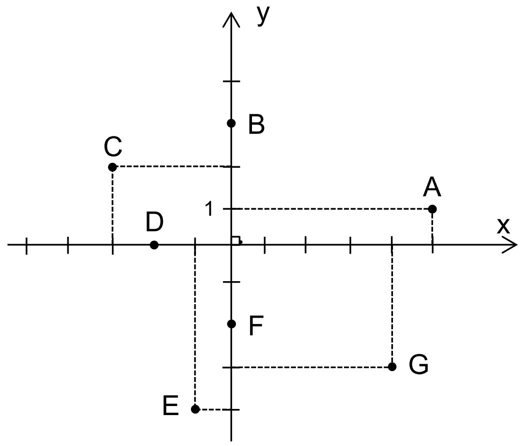
Assim se a = 2, tem-se o ponto (2, -2)
se a = -2, tem-se o ponto (-2, 2)

De fato, existem dois pontos P da bissetriz dos quadrantes pares (b_p) cuja distância ao ponto A(2, 2) é 4. Observe-se a figura:



Exercícios

01- Dar as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F e G da figura abaixo:



02- Seja o ponto A(3p – 1, p – 3) um ponto pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, então a ordenada do ponto A é:

a) 0
b) –1
c) –2
d) $-\frac{8}{3}$
e) –4

03- O ponto A(p – 2, 2p – 3) pertence ao eixo das ordenadas. Obter o ponto B’ simétrico de B(3p – 1, p – 5) em relação ao eixo das abscissas.

04- Um triângulo equilátero de lado 6 tem um vértice no eixo das abscissas. Determine as coordenadas do 3º vértice, sabendo que ele está no 4º quadrante (faça a figura).

05- A distância entre dois pontos (2, -1) e (-1, 3) é igual a:

a) zero
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{7}$
d) 5
e) n.d.a.

06- Sendo A(3,1), B(4, -4) e C(-2, 2) os vértices de um triângulo, então esse triângulo é:

a) retângulo e não isósceles.
b) retângulo e isósceles.
c) equilátero.
d) isósceles e não retângulo.
e) escaleno.

07- Achar o ponto T da bissetriz dos quadrantes ímpares que enxerga o segmento de extremindades A(2, 1) e B(5, 2) sob ângulo reto.

08- O paralelogramo ABCD tem lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sendo A(0, 0), B(4, 2) e D(8, 0), determine as coordenadas do ponto C.

Respostas

01- Resposta: A(5, 1); B(0, 3); C(-3, 2); D(-2, 0); E(-1, -4); F(0, -2); G(4, -3).

02- Resposta: E.

Resolução

Como A pertence à bissetriz dos quadrantes ímapres $x_A = y_A \Rightarrow$ $3p - 1 = p - 3 \Rightarrow p = 1$.

Logo, o ponto A(-4, -4) tem ordenada igual a -4.

03- Resposta: B’(5, 3).

Resolução

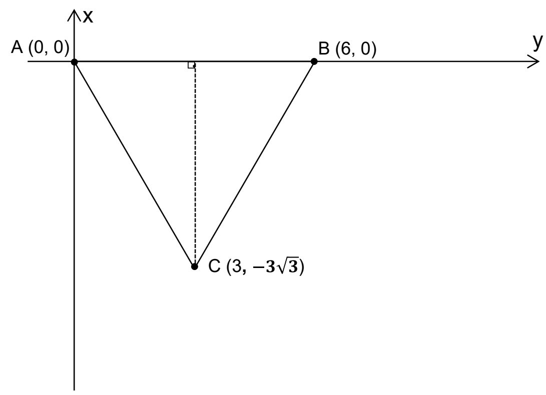
Se A pertence ao eixo das ordenadas, temos que $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$, logo, B(5, –3).

Como B’ é o simétrico de B em relação ao eixo das abscissas, temos a mesma abscissa e a ordenada oposta, logo, B’(5, 3) é o ponto procurado.

04- Resposta: C(3, $-3\sqrt{3}$).

Resolução

Lembrando que a altura do triângulo equilátero mede $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos: $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.



05- Resposta: D

Resolução

$\Delta x = 2 - (-1) = 3$ e $\Delta y = -1 - 3 = -4$

$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

d = 5

06- Resposta: D

Resolução

$d_{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$d_{AC} = \sqrt{(3+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$d_{BC} = \sqrt{(4+2)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$d_{BC} > d_{AB} = d_{BC}$ e

$d^2{}_{BC} \neq d^2{}_{AB+}d^2{}_{BC}$

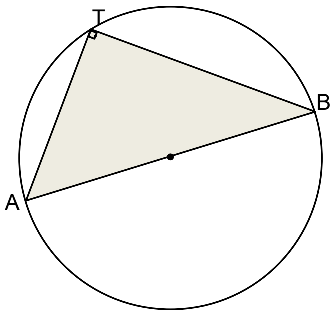
Portanto, o Δ ABC é isósceles e não retângulo.

07- Resposta; $T_1(2, 2)$ e $T_2(3, 3)$.

Resolução

T∈ bissetriz dos quadrantes ímpares ⇒ T(x, x).

Se T enxerga $\overline{AB}$ sob ângulo reto, então o triângulo ATB é retângulo em T.



$\Rightarrow d^2_{TA} + d^2_{TB} = d^2_{AB}$

Assim:

$[(x - 2)^2 + (x - 1)^2] + [(x – 5)^2 (x – 2)^2] = [(2 – 5)^2 + (1 – 2)^2]$

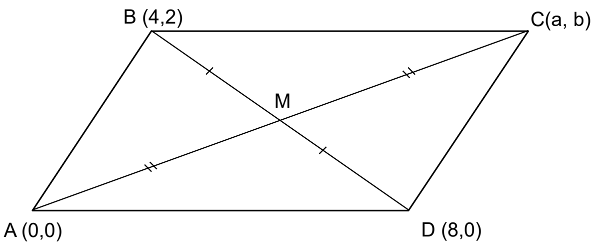
$X^2 – 4x + 4 + x^2 – 2x + 1 + x^2 – 10x + 25 + x^2 – 4x + 4 = 9 + 1$

$4x^2 – 20x + 24 = 0$

$X^2 – 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$.

08- Resposta: C(12, 2).

Resolução



M é o ponto de encontro das diagonais, portanto ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Dados B e D, temos M(6, 1) e agora temos A e M, logo:

$$\begin{matrix} x_M = \dfrac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow 6 = \dfrac{a + 0}{2} \\ y_M = \dfrac{y_C + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{b + 0}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 2 \end{cases}, \text{portanto}, C(12, 2)$$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES